SOBRE ALGUNOS PRINCIPIOS ELEMENTALES

DE NOMOGRAFÍA

POR

M. M. d'Ocagne (*).

(Tomado de *La Naturaleza* de Madrid, de 18 de Agosto de 1901)

Los principios de Nomografía aplicables con mas frecuencia a la representacion acotada de las ecuaciones de tres o cuatro variables,podrian figurar, como aplicacion de utilidad, en los cursos elementales de jeometría analítica (**). Los espondremos aquí desde este punto de vista,remitiendo a los lectores que deseen conocer su teoría jeneral al Tratado (***), donde hemos considerado la cuestion con toda la amplitud que exije, no solamente para las ecuaciones de tres i de cuatro variables, que son con mucho las mas frecuentes en la práctica, sino tambien para las ecuaciones de un número cualquiera de variables.

I.—Sistemas de elementos acotados

1.° *Elementos de una cota.*—Si se representa sobre un plano un sistema de elementos jeométricos que dependen de un parámetro, i se inscribe al lado de cada uno de ellos una *cota* igual al valor de su parámetro, se obtiene un *sistema de elementos de una cota.*

(*) *Bulletin des Sciences mathém.*, segunda série, tomo XXIV; Diciembre, 1900.

(**) Sobre la utilidad de esta introduccion, puede verse lo que dice M. J. Tannery en su análisis del Tratado que se cita mas abajo. (*Bullet. des Sc. math.*, segunda série, tomo XXIII, páj. 176.)

(***) *Traité de Nomographie* (Paris, Gauthier-Villars, 1899). Este libro se designará en el presente artículo con las letras *T. N.* El señor F. Schilling, profesor de la Universidad de Göttingen, ha publicado, en aleman, un resúmen del Tratado con el título *Ueber die Nomographie von M. d'Ocagne* (Leipzig, Teubnerg, 1900.

(****) En los *Nouvelles Annales* (1884) hemos consagrado a estas coordenadas un estudio detallado reproducido mas adelante en nuestro folleto *Coordenadas paralelas y axiales* (Paris, Gauthier-Villars, 1885), miéntras M. K. Schwering publicaba sobre el mismo asunto su folleto *Theorie und Anwendung der Linien-coordinaten* (Leipzig, Teubner, 1884). Para lo estrictamente necesario en las aplicaciones nomográficas, *véase T. N.*

Estos elementos pueden definirse, sea acudiendo a las coordenadas *puntuales* por una ecuacion de la forma

$$F(x, y, \alpha) = 0,$$

sea acudiendo a las coordenadas tanjenciales por una ecuacion de la forma

$$F(u, v, \alpha) = 0.$$

Les llamaremos elementos α. Es claro, por otra parte, que sólo estarán representados los elementos correspondientes a algunos valores particulares de α, escojidos de preferencia en progresion aritmética, i tambien que estos valores estarán todos comprendidos entre ciertos límites definidos por las necesidades de las aplicaciones que se tienen en cuenta.

Las coordenadas puntuales x e y serán casi siempre coordenadas cartesianas rectangulares, i las coordenadas tanjenciales u i v, coordenadas paralelas (****), cuyo empleo es sensiblemente mas cómodo en este jénero de aplicacion que el de las coordenadas pluckerianas.

Los elementos de una cota toman la forma mas sencilla cuando la ecuacion $F = 0$ es lineal, sea en x e y, sea en u i v. En el primer caso, se obtiene un sistema de *rectas de una cota* tanjentes a una línea que se denomina su *envolvento*; en el segundo, un sistema de *puntos de una cota* distribuidos sobre una línea que se llama su *soporte.* La envolvente se reduce a un punto, o el soporte a una recta, cuando la ecuacion $F = 0$ no encierra α mas que en una cierta funcion con relacion a la cual es lineal; es decir, cuando $F = 0$ toma la forma

$$F_1 + f(\alpha) F_2 = 0,$$

siendo F_1 i F_2 funciones lineales de x e y o de u i v solamente.

Un sistema de puntos de una cota toma el nombre de *escala rectilínea* o de *escala curvilínea,* segun la naturaleza de su soporte.

2.° *Puntos de dos cotas.*—Un sistema de elementos jeométricos de dos parámetros, dará un *sistema de elementos de dos cotas* cuando estos elementos sean susceptibles de un cierto modo de representacion en el plano. Pero semejante representacion no será jeneralmente posible, segun se desprende claramente de la siguiente observacion: Si se da a uno de los parámetros un valor fijo i se hace variar el otro, se obtiene un sistema de elementos de una cota que puede ser representado en el plano; pero si se construyen así todos los sistemas correspondientes a los diferentes valores particulares que conviene atribuir al primer parámetro, estos diversos sistemas, superponiéndose unos a otros, formarán un enredijo de líneas absolutamente incomprensible, a no ser en los casos que vamos a examinar i en estos casos *solamente.*

En primer lugar, si los elementos de que se trata son puntos, cada uno de los sistemas de una cota que acabamos de considerar contiene tan solo puntos situados sobre un cierto soporte, i los diversos soportes que corresponden a los valores particulares del primer parámetro, pueden coexistir en un mismo plano; de aquí la posibilidad de representar un sistema de *puntos de dos cotas.*

Sea

$$u f(a, a') + v\varphi(a, a') + \psi(a, a') = 0,$$

la ecuacion tanjencial que define estos puntos. Dando a uno de los parámetros, a o a', un valor fijo i haciendo variar al otro, se obtienen puntos situados sobre una misma línea (a) o (a'). Estos dos sistemas de líneas (a) i (a') forman una *red*, en la cual el punto (a, a') es el que se encuentra en la interseccion de las líneas (a) i (a').

3.° *Líneas condensadas en dos cotas.* — Cuando los elementos (a, a') no son puntos sino líneas, es necesario, para que puedan coexistir en el plano, que los sistemas de elementos de una cota, correspondientes a los diferentes valores particulares atribuidos a uno de los parámetros, coincidan todos en cuanto a la forma i disposicion de las líneas, difiriendo uno de otros solamente en las cotas: *a cada línea corresponderá una cota diferente en cada uno de los sistemas.* Esta circunstancia se produce únicamente cuando en la ecuacion que define los elementos considerados, se pueden reunir bajo un mismo signo de funcion, es decir, cuando esta ecuacion es de la forma

$$F[x, y, \theta(a, a')] = 0.$$

En efecto, entónces coinciden todos los elementos (a, a') correspondientes a aquellos pares de valores a, a' para los cuales *la funcion $\theta(a, a')$ tiene un mismo valor* t; i el conjunto de todos los elementos (a, a') se reduce un sistema de elementos de una cota (t); pero a cada uno de estos elementos (t) corresponde a una infinidad de pares de valores a i a'. Entónces se dice que los elementos (a, a') estan *condensados* en los elementos (t).

¿Cómo podremos en este caso representar los diferentes pares de valores de los parámetros a i a' que corresponden a cada elemento (t)? Por el siguiente sencillo procedimiento, tracemos a traves del haz de líneas (t) definidas por la ecuacion (*)

$$F(x, y, t) = 0,$$

un haz de líneas cualquiera, que haremos depender de uno de los parámetros a por ejemplo, por medio de una ciertaecuacion

$$\varphi(x, y, a) = 0.$$

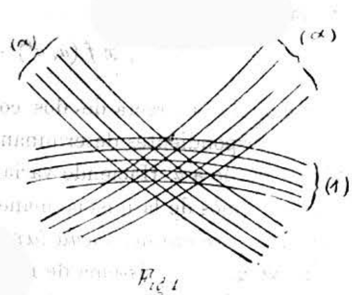

Fig 1

(*) Si se trata de elementos definidos en coordenadas tanjenciales, se puede siempre, para resolver este problema, tomar su ecuacion en coordenadas puntuales, deduciéndola por el procedimiento conocido de su ecuacion tanjencial.

Si fijamos ahora un cierto valor de a', i consideramos todos los pares de valores correspondientes de i t que resulten de la ecuacion

$$\theta (a, a') = t,$$

vemos que los puntos de interseccion de las líneas (t) i (a) correspondientes se encontrarán sobre una línea cuya ecuacion

$$\psi (x, y, a') = 0$$

resulta de la eliminacion de a i t entre las tres últimas ecuaciones, i que podrá tener por cota el valor atribuido a a'. Haciendo variar este valor de a' se obtendrá un haz de líneas (a') definido por la última ecuacion, el cual, en union del haz de líneas (a), escojido arbitrariamente, da a conocer los diferentes pares de cotas correspondientes a las líneas del sistema (t) (fig. 1).

El conjunto de los haces a i a' forma entónces una red que puede llamarse la *red de cotas* del sistema (t), i vemos que *a cada elemento condensado* (t) *corresponden los pares de valores de todcs aquellos puntos de la red* (a, a'), *por los cuales pasa este elemento.*

Si los elementos condensados (t) son rectas paralelas, su conjunto, la red de cotas inclusive, constituye lo que se llama una *escala binaria.*

4.º *Rectas de dos cotas. Dobles envolventes.*—Los elementos que acabamos de examinar son los únicos susceptibles de representacion *permanente* en el plano; pero la introduccion de sistemas movibles permite estender el campo de elementos de dos cotas utilizables en la construccion de ábacos. Se concibe, en efecto, que los elementos de un sistema de dos cotas pueden obtenerse en ciertos casos, sea acudiendo a desplazamientos, definidos por dos parámetros, de un plano que resbala sobre el primero i en el cual se ha trazado una sola línea, sea acudiendo a desplazamientos, definidos por un solo parámetro, de este mismo plano i trazando en él un sistema de líneas. Limitándonos al caso mas sencillo i mas interesante al mismo tiempo desde el punto de vista práctico, es claro que si los elementos de doble cota son rectas, podremos enjendrarlos por medio de una sola recta movible. Sea, pues,

$$x f (a, a') + y\varphi (a, a') + \psi (a, a') = 0$$

la ecuacion de una recta de dos cotas. Si se da a a un valor fijo i se hace variar a', las rectas correspondientes determinan una envolvente que puede acotarse por medio del valor atribuido a a. Haciendo variar este valor, obtendremos el sistema de envolventes (a). Definiremos de la misma manera el sistema de envolventes (a'). *La recta de dos cotas* (a, a') *será entónces una tanjente comun a las envolventes* (a) i (a').

Se ve que este sistema de rectas de dos cotas es exactamente correlativo del que se ha considerado en el número 2 para los puntos de dos cotas. Sólo que aquí la recta (a, a') no existe en estado permanente en el cuadro: como sucedia con el punto (a, a'): está definida por sus envolventes a, i a', i cuando necesitemos de ella tendremos que trazar la tanjente comun a estas dos curvas, tanjente que puede estar constituida por una recta trazada sobre un plano trasparente o por un hilo tirante.

Es evidente, *a priori*, que los modos de representacion fundados en el empleo de elmentos de dos cotas todos *distintos* [que prácticamente no serán, en jeneral, mas que puntos (núm. 2), o rectas (núm. 4)], tendrán mucha mas jeneralidad que los que hacen intervenir solamente elementos condensados.

II.—Tipos de ábacos de tres i cuatro variables

5.° *Abacos puntuales de tres variables.*—La relacion de posicion mas sencilla que puede establecerse entre tres líneas definidas en el dominio puntual, consiste en que pasen las tres por el mismo punto. De ahí el tipo jeneral de ábaco puntual de tres variables (fig. 2). Consideremos los tres sistemas de líneas de una cota definidos respectivamente por las ecuaciones.

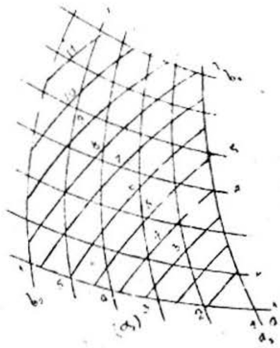

FIG. 2

$$(1) \qquad F_1(x, y, \alpha_1) = 0,$$

$$(2) \qquad F_2(x, y, \alpha_2) = 0,$$

$$(3) \qquad F_3(x, y, \alpha_3) = 0,$$

Si tres líneas tomadas respectivamente en estos sistemas pasan por un mismo punto, las cotas correspondientes estan ligadas por la ecuacion

$$(E) \qquad \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

obtenida por la eliminacion de x e y entre las tres ecuaciones correspondientes.

Toda ecuacion entre tres variables puede representarse así de una infinidad de maneras. Se ve, en efecto, que dada la última ecuacion, pueden elejirse arbitrariamente dos de las precedentes, (1) i (2) por ejemplo; la tercera resulta entónces de la eliminacion de α_1 i α entre (1), (2) i *(E)*.

Será posible siempre constituir dos de los sistemas acotados por medio de rectas, i aun por medio de las rectas $x = \alpha_1$, $y = \alpha_2$, que definen una cuadrícula regular, a traves de la cual se trazan las curvas (α_3). Prácticamente, la eleccion de los dos primeros sistemas está sujeta a la condicion de conducir, por la eliminacion indicada mas arriba, a un tercer sistema *real*, i, por otra parte, en esta eleccion nos guiaremos por la conveniencia de obtener, en los tres sistemas, las líneas acotadas mas sencillas que sea posible. Este es uno de los principales objetos de la Nomografía. Es claro, especialmente, que siempre que sea posible deberemos limitarnos al empleo esclusivo de rectas acotadas. Nada mas fácil que formar el tipo de las ecuaciones representables por tres sistemas de rectas de una cota; las ecuaciones (1), (2) i (3) toman, efectivamente, en este caso, la forma

(1') $$x f_1(\alpha_1)+y\varphi_1(\alpha_1)+\psi_1(\alpha_1)=0,$$

(2') $$x f_2(\alpha_2)+y\varphi_2(\alpha_2)+\psi_2(\alpha_2)=0,$$

(3') $$x f_3(\alpha_3)+y\varphi_3(\alpha_3)+\psi_3(\alpha_3)=0.$$

i la ecuacion *(E)* se convierte en

(E') $$\begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & \varphi_1(\alpha_1) & \psi_1(\alpha_1) \\ f_2(\alpha_2) & \varphi_2(\alpha_2) & \psi_2(\alpha_2) \\ f_3(\alpha_3) & \varphi_3(\alpha_3) & \psi_3(\alpha_3) \end{vmatrix}=0.$$

Entre las ecuaciones que comprende este tipo jeneral, las que mas a menudo se encuentran en la práctica son las de la forma (*)

(E'') $$f_1(\alpha_1)f_3(\alpha_3)+\varphi_2(\alpha_2)\varphi_3(\alpha_3)+\varphi_3(\alpha_3)=0.$$

Se ve que estan representadas por las sistemas de rectas de una cota

(1'') $$x=f_1(\alpha_1),$$

(2'') $$y=\varphi_2(\alpha_2),$$

(3'') $$x f_3(\alpha_3)+y\varphi_3(\alpha_3)+\psi_3(\alpha_3)=0.$$

Contentémonos con observar aquí que, dado un ábaco de rectas acotadas, es posible hacerle sufrir la trasformacion homográfica mas jeneral, conservando las cotas de las diferentes rectas que le constituyen. Como semejante trasformacion depende en el plano, de ocho parámetros, se puede juzgar *a priori* de la elasticidad que con ella se introduce en la construccion de ábacos, permitiendo adoptar en ellos las disposiciones mas ventajosas (**).

Observemos, por otra parte, que aun cuando en la práctica es jeneralmente fácil asimilar una ecuacion dada a uno de los tipos jenerales indicados mas arriba, hai interes en definir los caracteres analíticos que permiten determinar *a priori* la posibilidad de semejante asimilacion. Esta cuestion entraña problemas puramente analíticos que no carecen de interes ni de dificultad.

(Continuará).

(*) Véanse diferentes ejemplos de ecuaciones de esta clase: *T. N.*, cap. II, § II.

(**) *T. N.* números 49 i 50.