Teoría de las mareas

POR

A. Obrecht

(Conferencia dada el 14 de Octubre de 1912)

El fenómeno de las mareas tiene su oríjen en la variabilidad de direccion de la vertical i esta variabilidad, a su vez, es una consecuencia directa de la lei de la gravitacion universal. En efecto, un punto material, a la superficie de la Tierra está sometido a la atraccion de la Tierra misma i a las atracciones de los demas astros: la primera es preponderante i puede ser considerada como constante, pero las otras varian a medida que los astros cambian de posiciones alrededor de la Tierra.

El estudio de las mareas comprende dos problemas distintos: el primero consiste en determinar la variacion periódica de la gravedad en los diversos puntos de la Tierra i a deducir de ella las oscilaciones de las superficies de nivel de la pesantez; el segundo se ocupa de los movimientos correspondientes de las aguas del mar.

Si el agua fuera un fluido perfecto, el nivel superior del mar coincidiria, en cada instante, con alguna de las superficies de nivel de la pesantez; pero la coincidencia no llega nunca a realizarse porque la inercia misma del agua i el roce de las moléculas, unas con otras, i con el fondo del mar perturban constantemente el movimiento.

El segundo problema, como se ve, es mui complejo i su resolucion no está a nuestro alcance.

A pesar de todo se concibe que las oscilaciones de la marea deben tener los mismos períodos que las oscilaciones de las superficíes de nivel de la pesantez, porque unas i otras obedecen a una misma causa periódica.

La observacion justifica este raciócinio i ella demuestrn, ademas, que las fases de las diversas oscilaciones llegan a las costas con ciertos atrasos, constantes en cada punto, pero distintos de un punto a otro. En cuanto a las amplitudes de las oscilaciones, ellas son jeneralmente distintas de las que se refieren a las superficies de nivel de la pesantez i distintas tambien de un punto a otro de la Tierra, pero sus magnitudes guardan entre sí relaciones constantes i aproximadamente iguales a las que caracterizan las oscilaciones de las superficies de nivel teóricas.

Peso de un punto material

Para mantener un punto material en reposo a la superficie de la Tierra es necesario ejercitar sobre él una fuerza igual i de sentido contrario a su peso.

Sean m la masa del punto i $m\gamma$ su peso; $m\,G$ la atraccion de la Tierra i $m\,I$ la resultante de las atracciones de los demas cuerpos celestes sobre el punto considerado. Cuando éste permanece en reposo a la superficie de la Tierra, la fuerza que obra sobre él es la resultante de $m\,\gamma$, $m\,G$, $m\,I$.

Ahora el punto está en reposo relativo i su movimiento, en el espacio, es la resultante a una traslacion igual a la del centro de gravedad de la Tierra i de una rotacion alrededor de su eje de revolucion.

Sean I' la aceleracion del centro de gravedad de la Tierra i ω la velocidad angular del movimiento diurno; ρ el radio de la Tierra i φ la latitud jeográfica del lugar en que se encuentra el punto m. El radio del paralelo del punto es $\rho \cos \varphi$ i la aceleracion de su movimiento de rotacion se reduce a la aceleracion centrípeta $\omega^2\,\rho \cos \varphi$.

En consecuencia, la aceleracion del punto, en su movimiento en el espacio, es la resultante de I' i de $\omega^2\,\rho\cos\varphi$ i la fuerza capaz de dar al punto esta aceleracion es la resultante de $m\,I'$ i de $m\,\omega^2\,\rho\cos\varphi$. Esta fuerza es, por lo tanto, igual a la que mantiene el punto en reposo relativo a la superficie de la Tierra i se deduce así la ecuacion

$$\overline{mG} + \overline{mI} - \overline{m\,\gamma} = \overline{mI'} + \overline{m\,\omega^2\,\rho\,\cos\,\varphi}$$

De ella resulta

$$\overline{\gamma} = \overline{G} - \overline{\omega^2\,\rho\,\cos\,\varphi} + \overline{I} - \overline{I'}$$

Sea todavía

$$\overline{g} = \overline{G} - \overline{\omega^2\,\rho\,\cos\,\varphi}$$

Se obtiene

$$\overline{\gamma} = \overline{g} + \overline{I} - \overline{I'} \tag{1}$$

En esta última ecuacion, g representa la aceleracion de la pesantez cuando se prescinde de las atracciones de los cuerpos celestes, otros que la Tierra.

Cálculo de I i I'

Se considera, en el centro de la Tierra, un sistema de tres ejes de coordenadas rectangulares, ligados a la Tierra. Sean x, y, z las coordenadas de m i X, Y, Z las de un astro de masa μ, r la distancia $m\,\mu$ i f la constante de la gravitacion universal. La atraccion ejercitada por μ sobre m es

$$f\,\frac{m\,\mu}{r^2}$$

y su proyeccion sobre el eje $O\,X$ es

$$f\,m\,\mu\,\frac{X-x}{r^3}$$

La fuerza $m\,I$ es, por definicion, la resultante de las atracciones ejercitadas por los diversos astros sobre m. Sea, por consiguiente, I_x la proyeccion de I sobre OX; se tiene

$$m\,I_x = \Sigma\,f\,m\,\mu\,\frac{X-x}{r^3}$$

En el segundo miembro los valores de μ, X, r cambian de un astro a otro astro, pero f, m, x conservan los mismos valores. Se puede, por lo tanto, poner $f\,m$ en factor comun i dividir toda la ecuacion por m.

Se obtiene así

$$I_x = f\,\Sigma\,\mu\,\frac{X-x}{r^3}$$

La aceleracion I' del centro de gravedad de la Tierra resulta de las atracciones de los cuerpos celestes sobre este punto, en el cual se supone concentrada la masa total de la Tierra. En consecuencia, se puede deducir la proyeccion I'_x del valor de I_x si se reemplaza x por cero i r por la distancia R del astro μ al centro dela Tierra.

Segun esto, se tiene

$$I'_x = f\,\Sigma\,\mu\,\frac{X}{R^3}$$

Superficies de nivel de la pesantez

Sean γ'_x g_x las proyeccion de γ i g sobre OX. Se deduce de la ecuacion (1)

$$\gamma_x = g_x + I_x - I'_x$$

Luego

$$(2). \qquad \gamma_x = g_x + f\,\Sigma\,\mu\left(\frac{X-x}{r^3} - \frac{X}{R^3}\right)$$

Esta ecuacion i las otras dos análogas, relativas a los otros dos ejes de coordenadas, definen las proyecciones de la gravedad γ en cada punto de la tierra.

En los segundos miembros figuran dos clases de términos: unos dependen de las coordenadas x, y, z del punto m i los otros de las coordenadas X, Y, X de cada astro μ. Estas últimas varıan con el tiempo. Por consiguiente las tres proyecciones de la acceleracion γ son tambien variables.

Se deduce que las superficies de nivel de la pesantez, normales en cada punto a la direccion de la vertical en este punto, tienen una forma variable.

Sean, en un instante dado, dx, dy, dz las proyecciones de un cambio de lugar del punto m sobre la superficie de nivel que pasa por este punto. Se tiene, en todos los puntos de la misma superficie,

$$\gamma_x \; dx + \gamma_y \; dy + \gamma_z \; dz = o$$

Al reemplazar las tres proyecciones de γ por sus valores (2) se obtiene otra ecuacion en la cual figuran las espresiones siguientes:

$$g_x \; dy + g_y \; dy + g_z \; d_2$$

$$(X - x) \; dx + (Y - y) \; dy + (Z - z) \; dz$$

$$Ydx + Ydy + Zdz$$

Cuando se desprecian las atracciones de los astros μ, la acceleracion γ de la pesantez se reduce al valor g i se demuestra que, a esta última acceleracion, corresponden ciertas superficies de nivel determinadas. Una de ellas es el *geoïde* o sea la superficie del nivel medio del mar.

Por lo tanto las tres proyecciones de g son las derivadas parciales de una misma funcion $F(x, y, z)$ i se tiene

$$g_x \; dx + g_y \; dz + g_z \; dz = d \; F(x, y, z)$$

Ahora las coordenadas X, Y, Z de cada astro μ, respecto del centro de la Tierra, tienen, en el instante considerado, ciertos valores determinados los cuales no varian cuando el punto m cambia de lugar a la superficie de la Tierra; en consecuencia X, Y, Z deben considerarse como constantes. Si se observa que

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = r^2$$

Se deduce

$$(X - x) \; dx + (Y - y) \; dy + (Z - z) \; dz = -r \; d \; r$$

Por otra parte, $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ es la diferencial de $X\,x + Y\,y + Z\,z$; luego la ecuacion diferencial de las superficies de nivel es

$$d\,F(x, y, z) + f\,\Sigma\,\mu\left\{-\frac{r\,d\,r}{r^3} + \frac{d\,(X\,x + Y\,y + Z\,z)}{R^3}\right\} = o$$

La integration da entonces

$$(3). \qquad F(x\,y\,z) + f\,\Sigma\,\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{X\,x + Y\,y + Z\,z}{R^3}\right) = C^{te}$$

La constante que figura en el segundo miembro es independiente de las coordenadas x, y, z del punto m, pero su valor puede ser una funcion de las cordenadas X, Y, Z de cada astro μ.

Es conveniente trasformar la ecuacion (3) i aprovechar la circunstancia de que el radio ρ de la Tierra es siempre mui pequeño en comparacion de la distancia R. Sea θ el ángulo que forma ρ con R; se deduce del triangulo $O\,m\,\mu$

$$r^2 = R^2 - 2\,\rho\,R\cos\theta + \rho^2$$

Luego

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left(1 - 2\,\frac{\rho}{R}\cos\theta + \frac{\rho^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

El paréntesis puede desarrollarse en serie convergente, ordenada segun las potencias de $\frac{\rho}{R}$. Si se desprecian los términos de grado superior al segundo, se obtiene

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\rho}{R}\cos\theta - \frac{\rho^2}{2\,R^2} + \frac{3\,\rho^2}{2\,R^2}\cos^2\theta\right)$$

Por otra parte se deduce del mismo triángulo

$$X\,x + Y\,y + Z\,z = R\,\rho\cos\theta$$

Luego

$$\frac{1}{r} - \frac{X\,x + Y\,y + Z\,z}{R^3} = \frac{1}{R} + \frac{\rho^2}{R^3}\;\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$$

Al sustituir esta espresion en la ecuacion (3) se puede prescindir del término $\frac{1}{R}$ que no depende de la posicion del punto m i pasa a figurar en la constante del segundo miembro. Se obtiene, por consiguiente,

$$F(x, y, z) + f \Sigma \mu \frac{\rho^2}{R^3} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} = C^{te}$$

Para apreciar el órden de magnitud del efecto de la atraccion de los astros sobre la forma de las superficies del nivel se reemplaza f por un valor aproximado. Sea M la masa de la Tierra, se puede escribir

$$g = \frac{fM}{\rho^2}$$

Luego

$$(4). \qquad F(xy^2) + \rho g \Sigma \frac{\mu}{M} \frac{\rho^3}{R^3} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} = C^{te}$$

Esta ecuacion demuestra que *el efecto de un astro sobre la pesantez es proporcional a su masa i en razon inversa del cubo de su distancia a la tierra.*

Se deduce que los únicos astros que pueden tener un efecto apreciable son el Sol i la Luna; el Sol por su gran masa i la Luna por su corta distancia a la Tierra.

Efectivamente si adopta, como unidad, el efecto del Sol se obtiene, para los diversos cuerpos del sistema planetario, los efectos máximos siguientes:

Sol......................	1
Luna......................	2,23
Venus......................	0,000.11
Júpiter......................	0,000.013
Marte......................	0,000.0024
Mercurio......................	0,000.000.8
Saturno......................	0,000.000.3
Urano......................	0,000.000.006
Neptuno......................	0,000.000.002

Alturas de los puntos de una superficie de nivel encima del geoide

Sea h la altura del punto m encima del geoide, el valor de la funcion $F(x, y, z)$ en el punto m difiere de su valor sobre el geoide de una cantidad igual ál trabajo de la pesantez g, para el cambio de lugar de un punto, desde el geoide hasta m.

Si el punto m se ha elejido cerca del geoïde, todos los puntos de la superficie de nivel que pasa por m son próximos tambien del geoïde i, para todos ellos, se puede adoptar, para el trabajo considerado, la espresion $- g h$.

El valor constante de la funcion $F(x, y, z)$ en los puntos del geoïde puede pasar a figurar en el segundo miembro de la ecuacion (4) i esta se reduce a

$$- gh + \rho g \Sigma \frac{\mu}{M} \frac{\rho^3}{R^3} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} = C^{te}$$

Sea $d\,S$ un elemento de área sobre el geoïde, se determina la constante de tal manera que la suma de los productos $g\,h\,d\,s$, para todo el geoïde, sea igual a cero.

Se averigua entónces que la integral correspondiente del segundo término es igual a cero; por consiguiente, la constante del segundo miembro es nula i se obtiene

$$(5) \qquad h = \rho\,\Sigma\,\frac{\mu}{M}\,\frac{\rho^3}{R^3}\,\frac{3\,cos^2\,\theta - 1}{2}$$

Esta fórmula define, por consiguiente, en el instante considerado, la altura de un punto cualquiera de la pesantez variable encima del geoïde.

La misma ecuacion define tambien, en un punto de la Tierra, el valor de h en funcion del tiempo porque las cantidades R i θ son variables.

Oscilaciones de diversas especies

Sean, en un instante dado, δ la declinacion del astro μ i H su ángulo horario. El ángulo θ de la ecuacion (5) es aproximadamente igual a la distancia zenital del astro i se tiene la relacion

$$cos\,\theta = sen\,\varphi\,sen\,\delta + cos\,\varphi\,cos\,\delta\,cos\,H$$

Por consiguiente, si se reemplaza el cuadrado de $cos\,H$ por su valor en funcion del ángulo $2\,H$,

$$cos^2\,\theta = sen^2\,\varphi\,sen^2\,\delta + \tfrac{1}{2}\,cos^2\,\varphi\,cos^2\,\delta$$
$$+\,2\,sen\,\varphi\,cos\,\theta\;\;sen\,\delta\,cos\,\delta\,cos\,H$$
$$+\,\tfrac{1}{2}\,cos^2\,\theta\,cos^2\,\delta\,cos\,2\,H$$

Al substituir este valor de $cos^2\,\theta$ en la ecuacion (5) se obtienen tres clases de términos. Los primeros no dependen del ángulo horario H i sus valores varian únicamente con la declinacion δ del astro i su distancia R de la Tierra. Estas variaciones tienen un período relativamente largo; de un año para el Sol i de un mes para la Luna. Ellas se llaman *oscilaciones de primera especie.*

Los términos de la segunda clase contienen en factor $cos\,H$ i su período de variacion es, por consiguiente, de un dia mas o ménos. A ellos corresponden las oscilaciones diurnas o de *segunda especie.* Sus amplitudes son pequeñas porque, en los referidos términos, figura el factor $sen\,\delta$, cuyo valor es jeneralmente pequeño.

Finalmente los términos de la tercera clase contienen en factor $cos\,2\,H$. Su período de variacion es, por consiguiente, de un medio dia aproximadamente. Estos términos definen las oscilaciones *semi diurnas* o de *tercera especie.*

En la teoría de las mareas se consideran preferentemente las oscilaciones semi-diurnas, por tener éstas las amplitudes mas grandes. Esto equivale a despreciar en el valor (5) de h los términos que no contienen cos $2\,H$ en factor; se obtiene así

$$h = \frac{3}{4}\,\rho\,cos^2\,\rho\,\Sigma\,\frac{\mu}{M}\;\frac{\rho^3}{R^3}\,cos^2\,\delta\;\;cos\;2\,H$$

Esta fórmula se reduce, a su vez, a los dos términos que dependen del Sol i de la Luna. Los elementos de este último astro se distinguen con letras acentuadas.

Sea a la distancia media del Sol a la Tierra; se pone, para simplificar,

$$\frac{3}{4}\;\rho\,\cos^2\varphi\;\frac{\mu}{M}\;\frac{\rho^3}{a^3} = k$$

$$\frac{a^3}{R^3}\,cos^2\,\delta = \alpha$$

i se obtiene así

$$h = \alpha'\;k'\;cos\;2'H + \alpha\,k\,cos\;2\,H$$

Los valores de k' i k' son constantes, en un punto dado de la Tierra, pero α i α' son dos coeficientes variables, El cálculo numérico de

$$k = 0.12\text{ m }\;cos^2\,\rho$$

$$k = 0{,}27\text{ m }\;cos^2\,\rho$$

Como los coeficientes α', α tienen valores próximos de uno, se deduce que la diferencia máxima del nivel de las superficies teóricas es de *80 centímetros*. Esta diferencia es máxima en el Ecuador i ella se reduce a cero en los polos.

Aplicacion a las oscilaciones del mar

La observacion de las mareas comprueba que las oscilaciones de mayor amplitud son, por lo jeneral, los de período semi diurno. Pero las amplitudes mismas son mui distintas de las que se refieren a las superficies de nivel teóricas.

Desde luego el cuociente de k' por k es igual a 2,23, segun las fórmulas establecidas mas arriba. Miéntras tanto, la observacion de las mareas parece indicar que este cuociente es casi exactamente igual a *3*, como si el efecto de la Luna fuese mayor que corresponde a su masa.

La misma observacion demuestra que las fases de las dos oscilaciones debidas a las acciones del Sol i de la Luna, llegan a un punto dado de la costa con ciertos atrasos, mas o ménos constantes.

Se llega así a adoptar, para representar las oscilaciones del mar, la fórmula empírica

$$(6) \qquad h = \alpha' k' \cos 2 (H' - B') + \alpha k \cos 2 (H - B)$$

B i B' son los atrazos con los cuales llegan las dos oscilaciones i k', k' dos coeficientes constantes cuyos valores son jeneralmente mui distintos de los teóricos.

La ecuacion (6) tiene una interpretacion jeométrica que facilita su discusion: se consideran, en un plano, dos vectores de lonjitudes αk i $\alpha k'$, colocados a continuacion uno del otro i que forman, con un eje del mismo plano, los ángulos $2 (H' - B')$ i $2 (H' - B')$. En estas condiciones h es la proyeccion, sobre el mismo eje, de la resultante jeométrica de los dos vectores.

Como $\alpha' k'$ es, mas o ménos, el triple de αk, el vector resultante forma siempre un ángulo agudo con $\alpha' k'$. Sea $2 C$ este ángulo i c el vector resultante. Se deduce de una figura mui sencilla, las ecuaciones

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} c \cos 2 C &= \alpha' k' + \alpha k \cos 2 (H' - B' - H + B) \\ c \operatorname{sen} 2 C &= \alpha k \operatorname{sen} 2 (H' - B - H + B) \\ h &= c \cos 2 (H' - B' - C) \end{aligned} \right.$$

Segun esto, el valor de h es una oscilacion de amplitud i de fase variables.

Altas mareas

Los datos que tienen mas interes en la práctica son las horas de las altas mareas i las alturas del nivel del mar en esos instantes.

Se deduce del valor de h que la alta marea tiene lugar cada vez que se tiene

$$H' - B' - C = o$$

El ángulo variable C que figura en esta ecuacion es la mitad del ángulo $2 C$ que forma αk con el vector resultante c. Este último es del órden máximo de $\frac{1}{3}$, o sea de unos 20 grados. Por consiguiente C es siempre menor que 10 grados, o sea 40 minutos de tiempo.

Se deduce que en los instantes de las altas mareas, el ángulo horario H′ de la Luna tiene un valor sensiblemente constante.

Sean T el instante de la alta marea i P la hora del paso, superior o inferior, de la Luna por el meridiano—se considera el paso que precede el instante T— ; la diferencia $T—P$ es proporcional i casi igual a H'.

Es conveniente observar que la aproximacion con la cual se debe calcular el valor de T es sólo de algunos minutos; en estas condiciones se puede admitir que la espresion del ángulo C, en minutos de tiempo, representa el ángulo que describe el plano horario de la Luna, en el tiempo C. Se deduce que la diferencia $T—P—C$ tiene un valor constante en los instantes de las altas mareas. Sea E este valor, se tiene la fórmula práctica

$$T = P + C + E$$

El término E se llama *establecimiento del puerto;* su valor representa el atraso con el cual llegan las fases de las oscilaciones debidas a la accion de la Luna.

En los mismos instantes de las altas mareas, el ángulo $H' - B' - H + B$ tiene un valor determinado;

En efecto se tiene

$$H' = B' + C$$

$$H = T = P + C + E$$

Luego

$$H' - B' - H + B = -P - E + B$$

Sea

$$B - E = e$$

El valor de e representa la diferiencia de los atrazos en la llegada de las oscilaciones debidas a las acciones del Sol i de la Luna.

Se tienen finalmente las fórmulas

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{l} c \cos 2\, C = \alpha' k' + \alpha k \cos 2\,(P - e) \\ c \operatorname{sen} 2\, C = \alpha k \operatorname{sen} 2\,(P - e) \\ \qquad T = P + C + E \end{array} \right.$$

Las dos primeras definen la amplitud c de la oscilacion i el valor del ángulo C; su interpretacion jeométrica es igual a la anterior i los dos vectores $\alpha' k'$ i αk forman entre sí el ángulo $2\,(P - e)$.

Mareas de syzygias

Se llaman así las mareas de amplitud máxima. Se deduce de la interpretación jeométrica que la amplitud es máxima cuando los dos vectores $\alpha' k'$ i αk tienen la misma direccion i el mismo sentido. La amplitud es igual entonces a $\alpha' k' + \alpha k$ i el ángulo $2\,(P - e)$ es igual a cero o a 360°. En consecuencia el ángulo P — e es igual a cero o a 180°.

Si la constante e estuviera nula, la Luna i el Sol estarian en conjuncion o en oposicion. En la práctica no sucede así i la observacion del instante de la alta marea máxima permite precisamente fijar el valor de e.

Mareas de aguas muertas

Estas son las mareas de amplitud mínima i se deduce de la misma interpretacion jeométrica que los dos sectores $\alpha' k'$ i $\alpha\, k$ tienen entonces direcciones iguales i senidos opuestos. La amplitud de las mareas es entónces $\alpha' k' - \alpha\, k$ i el ángulo $2\,(P-e)$ es igual a $\pm\, 180°$. Luego el ángulo $P-e$ es igual a $\pm\, 90°$.

Si la constante e estuviera nula los dos astros estarian en cuadratura. En la práctica se deducirá de la observacion misma de la alta marea mínima el valar de la constante e.

Determinacion práctica de las constantes de la ecuacion de la marea

Sean c_1, c_2 las alturas de las mareas de syzygias i de aguas muertas; los coeficientes variables α, α' tendrán ciertos valores determinados i los datos necesarios para calcularlos se encuentran en las efemerides astronómicos. Se tiene entónces

$$c_1 = \alpha'_1\, k' + \alpha_1\, k$$

$$c_2 = \alpha'_2\, k' - \alpha_2\, k$$

De estas dos ecuaciones se deducen los valores de k i k'. Sean, por otra parte, T el instante de una alta marea de syzygia i P la hora del paso, superior o inferior, mas próximo de T, de la Luna por meridiano, se tiene

$$P - e = o$$

$$T = P + \mathrm{E}$$

Estas dos ecuaciones permiten calcular los valores de e i E.

Cálculo práctico del ángulo C i de la amplitud de la marea

Como el valor de C no necesita calcularse con una aproximacion mayor que algunos minutos, se puede escribir simplemente, segun (8).

$$\operatorname{tg} 2\, C = -\frac{\operatorname{sen} 2\,(P-e)}{3 + \cos 2\,(P-e)}$$

Se ha reemplazado, como se ve, el cuociente de $\alpha' k'$ por $\alpha\, k$ por su valor medio 3. La fórmula así reducida puede transformarse en una Tabla numérica que da directamente el valor de C con el argumento $P-e$. Esta Tabla se encuentra a continuacion.

En cuanto a la amplitud c, se deduce de las ecuaciones (9)

$$c^2 = \alpha'^2\, k'^2 \left\{ 1 + 2\, \frac{\alpha\, k}{\alpha'\, k'} \cos 2\,(P - e) + \frac{\alpha^2\, k^2}{\alpha'^2\, k'^2} \right\}$$

De aquí se deduce, con suficiente aproximacion,

$$e = \alpha'\, k' \left\{ 1 + \frac{\alpha\, k}{\alpha'\, k'} \cos 2\,(P - e) + \frac{\alpha^2\, k^2}{\alpha'^2\, k'^2} \quad \frac{\operatorname{sen}^2\, 2\,(P - e)}{2} \right\}$$

Se pone entonces

$$c = \alpha'\, k' + n\, \alpha\, k$$

i se tiene

$$n = \cos 2\,(P - e) + \frac{\alpha\, k}{\alpha'\, k'} \quad \frac{\operatorname{sen}^2\,(P - e)}{2}$$

O todavia

$$n = \cos 2\,(P - e) + \tfrac{1}{8} \operatorname{sen}^2\, 2\,(P - e)$$

El coeficiente n se calcula tambien en forma de Tabla, con el argumento $P - e$.

TABLAS PARA EL CÁLCULO DE LA MAREA

$P-e$		C	n
0^h	12^h	0^m	$+1{,}00$
1	13	-15	$+0{,}91$
2	14	-28	$+0{,}62$
3	15	-37	$+0{,}17$
4	16	-38	$-0{,}38$
5	17	-26	$-0{,}82$
6	18	0	$-1{,}00$
7	19	$+26$	$-0{,}82$
8	20	$+38$	$-0{,}38$
9	21	$+37$	$+0{,}17$
10	22	$+28$	$+0{,}62$
11	23	$+15$	$+0{,}91$
12	24	0	$+1{,}00$

Hora de la alta marea $T = P + C + E$

Amplitud $c = \alpha'\, k + n\, \alpha\, k$