ESTUDIOS SOBRE PUENTES DE MADERA

CON UN ENSAYO PRÉVIO DE CLASIFICACION DE LAS CARGAS RODANTES PARA LAS VÍAS CARRETERAS DE CHILE

(Continuacion)

CAPÍTULO IV

Vigas de seccion variable con torna-puntas

54. Para salvar luces de 10 metros con una viga de seccion uniforma, ya hai que emplear secciones que no se encuentran de una manera corriente en el comercio. Ademas las dimensiones de las maderas para las partes laterales vienen a ser verdaderamente exajeradas. Conviene pues estudiar desde tramos de 10 metros en adelante el caso de una viga con torna-puntas i con viga-sopanda en la parte central. Admitimos siempre que la obra se compone de cinco vigas distantes de $1^m,25$ de eje a eje.

---

§ I. TRAMOS DE DIEZ METROS (Lámina V)

Estudiemos el caso de un tramo de 10 metros, compuesto 1.° de una viga de 20×30 centímetros, 2.° de una viga sopanda de 20×20 de seccion i de 5 metros de lonjitud, 3.° de dos torna-puntas de 20×30, que sirvan de apoyo a la viga a 2,50 metros de los estremos. Admitimos que en la parte central, las vigas de 20×30 i 20×20 trabajan como una pieza única de 20×50, bajo la condicion de examinar despues el modo de ensamble de estas piezas que mas convenga para que nuestra hipótesis sea admisible.

55. *Carga rodante.*—Emplearemos el método de las deformaciones. El modo de proceder es análogo con el que hemos seguido en el caso de las vigas de seccion constante. Reemplazando pues la accion de las torna-puntas por la reaccion vertical $Q \cos \alpha = R$ producida por la carga de 4 toneladas colocada en el medio del tramo, tendremos que resolver como ántes el sistema de tres ecuaciones

$$P + Q \cos \alpha = 2000^{k} \qquad (1')$$

$$Q = E_1\ \omega_1 \frac{f \cos \alpha}{\sigma} \qquad (2)$$

$$f = \phi\ (P,\ Q \cos \alpha) \qquad (3)$$

Tenemos ademas

$$f = f_{4000} - f_{Q \cos \alpha}$$

siendo:

f_{4000} i $f_{Q \cos \alpha}$ respectivamente las flechas producidas en C por la carga de 4000 kilógramos colocada en el centro i por las fuerzas $Q \cos \alpha$ aplicadas en C i D.

La determinacion de estas flechas es un tanto mas complicada que en el caso de las vigas de seccion constante, con motivo de la variacion de la distancia polar, producida por el cambio de $E\ I$.

La lámina V da los detalles del depurado.

Determinacion de f_{4000}.—Para la carga de 4 toneladas, hemos dividido el área de los momentos en 4 elementos cuyas líneas de separacion pasan por C, M i D. En estos puntos el trazado del elástico tendrá pues las mismas ordenadas que la fibra deformada. Hemos tomado (fig. 2) las lonjitudes *ab*, *bc*, *cd*, *de*, proporcionales a las áreas parciales. Como el área *ab* corresponde a una seccion de 20×30 para lo cual $EI_1 = 450000$, hemos trazado los radios polares *0* i *1* por medio de esta distancia polar $E\ I_1$. Como las áreas *bc* i *cd* corresponden a una sección de 20×50 para la cual $E\ I_2 = 208300$, hemos prolongado el radio polar 1 hasta F', de tal manera que $b\ F' = E\ I_2 = 208300$.

Despues hemos trazado los radios polares *2* i *3*. Por fin la última área *de* corresponde a la primera seccion 20×30. Por eso hemos tomado otra vez la distancia polar $E\ I_1$, que da el polo F″ en la direccion del radio *3*. Partiendo de F'' hemos podido trazar el radio polar *4*.

Hemos trazado el elástico tirando líneas paralelas a los radios *0*, *1*, *2*, *3*, *4*, como ántes. Para mayor facilidad, hemos enderezado el polígono, que dará en los puntos A, C, M, D, B, la verdadera flecha.

Segun el depurado tenemos

$$f'_{4000} = 2^{cm},25 \times 2 = 4^{cm},50$$

Como el depurado indica todos los detalles que se refieren a las escalas, nos abstenemos de dar nuevas esplicaciones sobre este asunto.

Determinacion de $f_{Q \cos \alpha}$ (figs. 4, 5 i 6).—Siguiendo una marcha análoga, hemos trazado la fibra deformada que se refiere a la carga $Q \cos \alpha = R$ aplicadas en C i D. Basta examinar atentamente el depurado para comprender el modo de proceder Bástará pues indicar el resultado.

Tenemos

$$f_{Q \cos \alpha} \text{ en } C = 0,^{cm}001880\ R$$

Valor de f.

Por consiguiente;

$$f = 4,^{cm}5 - 0,^{cm}001880\ Q \cos \alpha$$

Resolucion de las ecuaciones.—La ecuacion (2) será despues de las substituciones:

$$Q = 100000 \times 600 \frac{4,5 - 0,00188\ Q \times 0,707}{350} 0,707$$

o

$$(350 + 56400)\ Q = 190\ 890\ 000$$

resultando

$$Q = 3363 \text{ kg},$$

Por consiguiente

$$Q \cos \alpha = 3363 \times 0{,}707 = 2378 \text{ kg}.$$

i segun la ecuacion (1′)

$$P = 2000^{\text{k}} - 2378^{\text{k}} = -378^{\text{k}}$$

El momento en la mitad del tramo tendrá por valor

$$M_{\text{m}} = +378 \times 5^{\text{m}} - 2378 \times 2^{\text{m}},5 = 1890 - 5945 = -4055^{\text{kg. m}}$$

56. *Carga uniforme debida al peso muerto.*—El peso muerto por metro corrido de viga comprende en la parte central:

1.° Doble tablonaje. . . .	169	kgs. por	metro	corrido	de viga.
2.° Viga de 20×30. . . .	54	"	"	"	"
3.° Viga sopanda de 20×20.	36	"	"	"	"
4.° Tierra i humedad. . .	16	"	"	"	"
Total.	275	kgs. por	metro	corrido	de viga.

Aplicando este peso muerto en todo la lonjitud de la viga, el lugar de los momentos será un arco de parábola.

El momento máximo que se desarrolla en el punto medio, si se supone la pieza apoyada por sus dos estremos, será:

$$M_{\text{ma x}} = \tfrac{1}{8}\ 275 \times 100 = 3437{,}5 \text{ kgs. m.}$$

Lo mismo que en el caso de la carga rodante, hemos determinado la flecha producida en C i D:

1.° Por la carga uniforme repartida sobre la viga entera, apoyada en sus estremos A i B.

2.° Por las reacciones de las torna-puntas $Q \cos \alpha = R$.

Por esto, hemos dividido el área de la parábola en 4 partes cuyas verticales de division estan en C, M i D. Las áreas parciales pueden determinarse, sea con el planímetro, sea por medio de la fórmula de Simpson, sea directamente por la fórmula de cuadratura

$$S = \tfrac{2}{3}\, xy$$

Tomando en cuenta las escalas, se trasforma fácilmente a las áreas en kgms², que se aplican en los centros de gravedad de las áreas parciales.

No queda mas que trazar el diagrama de las fuerzas, tomando cuidado de cambiar la distancia polar EI cada vez que es necesario.

Tenemos así todos los elementos necesarios para el trazado del elástico en los dos casos que nos ocupan. Para hacer el depurado mas intelijible, hemos referido las dos fibras deformadas a una base horizontal. Todos los trazados que se refieren a la carga uniforme fueron hechos de líneas contínuas. Los trazados relativos a las cargas R se hicieron con líneas mistas. Las escalas estan indicadas en el depurado.

De esta manera, hemos hallado las flechas siguientes en C o D:

1.° Para la carga uniforme $f_p = 2,^{cm}2$.

2.° Para las cargas $Q \cos \alpha = R$

$$f_{Q \cos \alpha} = 0,^{cm}00\,188\; Q \cos \alpha.$$

Resolucion de las ecuaciones.—La ecuacion

$$Q = E\,\omega \frac{f \cos \alpha}{\sigma}$$

dará

$$Q = 100000 \times 600 \frac{2^{cm},2 - 0^{cm},00188\, Q \times 0,707}{350}\, 0,707$$

resultando

$$Q = 1645 \text{ kg.}$$

i

$$Q \cos \alpha = 1645 \times 0,707 = 1163 \text{ kg.}$$

Por fin, segun la ecuacion (1')

$$P = 275 \times 5 - 1163 = 212 \text{ kg.}$$

Trabajo de los materiales.—El momento en la mitad del tramo, debido al peso muerto, será:

$$M'_m = 275 \times 5 \times 2{,}5 - 212 \times 5 - 1162 \times 2{,}5 = -530 \text{ kgm.}$$

El momento máximo total será pues:

$$M_{max} \text{ total} = 4055 + 530 = 4588 \text{ kgm.}$$

produciendo un trabajo de

$$\frac{T}{S} = \frac{M_{max}}{\frac{I}{V}} = \frac{458800}{8332} = 55 \text{ kg. por cm}^2$$

57. *Compresion lonjitudinal producida por las torna-puntas.*—Dado que las vigas i las vigas-sopandas no son nunca completamente solidarias, i para colocarnos por demas en condiciones desfavorables, tomamos únicamente en cuenta la viga-sopanda para resistir a este esfuerzo de compresion lonjitudinal.

La mayor compresion de la torna-punta corresponde al instante en que una rueda está colocada en C o D. Considerando la torna-punta como un apoyo fijo, la compresion horizontal debida a la carga rodante será de 4000 kg., si la torna-punta tiene una inclinacion de 45°.

Para el peso muerto, tenemos para la compresion lonjitudinal producida por las torna-puntas

$$Q \cos \alpha = 1163 \text{ kg.}$$

La compresion total será pues:

$$4000^k + 1163^k = 5163^k$$

que dará, para la viga-sopanda, un trabajo máximo de

$$\frac{5163}{400} = 12^k{,}9$$

El trabajo máximo total será pues:

$$R = 55^k + 12^k{,}9 = 67^k{,}9 \text{ por cm.}^2$$

Torna-puntas—No hai necesidad de verificar las torna-puntas. Las dimensiones son mui suficientes. Hemos adoptado estas dimensiones en vista de obtener un buen ensamble de estas piezas con las vigas i tambien para evitar las deformaciones exajeradas de las vigas i ponerlas así en mejores condiciones de resistencia.

---

§ 2.—TRAMO DE DIEZ I SEIS METROS

58. Vamos a tratar el caso de un tramo de 16 metros compuesto de vigas de 30 × 30, con vigas-sopandas de 30 × 30, de seccion i de 8 metros de largo, con torna-puntas de 30 × 30, inclinadas en 53° sobre la vertical.

No bastará poner una carga de 4 toneladas en la mitad del tramo, pues se hace necesario tomar en cuenta las yuntas. Ademas, habrá que examinar si no hai economía en reducir el número de vigas lonjitudinales, introduciendo viguetas i acaso longuerinas que sirvan de apoyo al tablonaje. En este caso tambien habrá necesidad en comparar la carga rodante con la carga uniforme de 400 kg. por m^2, la cual podria dar resultados mas desfavorables.

Haremos el estudio de esta cuestion suponiendo cinco vigas inferiores distantes de 1^m 25 de eje a eje, como ántes. Introducimos las yuntas segun el tipo que hemos indicado anteriormente (Lámina I). Ademas, para no complicar inútilmente la cuestion, supondremos que el estado de solicitacion sea simétrico. La lámina VI da en detalle los depurados que se refieren a este caso.

59. *Carga rodante.*—Para el estado de solicitacion que hemos indicado (fig. 3), hemos trazado el lugar de los momentos suponiendo la pieza sobre dos apoyos. Despues hemos dividido esta área en una serie de elementos parciales, i los hemos concentrado en sus centros de gravedad respectivos. En seguida, despues de haber tomado sobre una vertical lonjitudes proporcionales a estas áreas, hemos trazado el diagrama de las inclinaciones, teniendo cuidado de tomar para cada área la distancia polar *EI* que le corresponde. Hemos trazado por fin el elástico

por medio de los radios polares del diagrama, i el polígono obtenido de esta manera nos ha dado la flecha en las verticales de separacion de las áreas. De esta manera hemos encontrado que la flecha en C i D, debida a la carga rodante, es:

$$\text{Flecha en } C \text{ i } D = 14 \text{ cm.}$$

Hemos hecho un trazado análogo para las reacciones

$$Q \cos \alpha = R$$

producidas por las torna-puntas (Lám. VI, figs. 1, 2, 3) i hemos obtenido para la

$$\text{flecha en } C \text{ i } D \text{ producida por } R = 0^{cm}0043\ R.$$

Considerando la ecuacion conocida

$$Q = E_1 \omega_1 \frac{f \cos \alpha}{\sigma}$$

tendremos con los valores

$$E_1 = 100000 \quad \omega_1 = 900 \quad \cos \alpha = \cos 53^{\circ} = 0{,}602 \quad \sigma = 500$$

$$f = \quad 14^{cm} - 0^{cm}{,}0043\ Q \cos \alpha$$

$$Q = 100000 \times 900 \frac{14 - 0{,}0043 \times 0{,}602\ Q}{500} 0{,}602$$

resultando

$$Q = 5395 \text{ kg.}$$

i

$$Q \cos \alpha = 5395^{k} \times 0{,}602 = 3248 \text{ kg.}$$

$$P = 3600 - 3248 = 352 \text{ kg.}$$

lo que dará, en la mitad del tramo, un momento

$$M_{m} = -352 \times 8 + 800 \times 6{,}70 - 3248 \times 4 + 800 \times 3^{m}{,}70 = -7488^{k}$$

60. *Peso muerto.*— El peso muerto por metro corrido de viga, en la parte central, comprende:

Dos vigas de 30 × 30.	162	k.
Doble tablonaje de 0^m 10 i 0^m 05 . .	169	k.
Clavos i pernos.	9	k.
	340	k.

Admitiremos 350 kgs. por metro corrido, i supondremos esta carga uniformemente repartida en toda la lonjitud del tramo

Hemos determinado (figs. 1, 2, 3):

1.° La flecha producida en C i D por esta carga, suponiendo la pieza apoyada por sus dos estremos; 2.° la flecha de direccion contraria producida por la reaccion de las torna-puntas.

El lugar de los momentos es una parábola. Hemos dividido el área de los momentos en cuatro elementos, cuyas líneas de separacion estan en C i D i en el medio del tramo. Los valores de las áreas de los momentos estan indicados en el depurado.

Siguiendo para el trazado del diagrama la marcha espuesta anteriormente, hemos hallado:

Flecha en C i D debida al peso muerto $= 10^{cm}16$
Flecha en C i D debida a Q cos $\alpha = 0^{cm}0043$ Q cos α.

Resolucion de las ecuaciones.

$$Q = E_1\, \omega_1 \frac{f \cos \alpha}{\sigma}$$

Como

$$E_1 = 100000 \quad \omega_1 = 900 \quad \cos \alpha = 0{,}602 \quad \sigma = 500$$

$$f = 10,^{cm}16 - 0,^{cm}0043 \times Q \cos \alpha$$

Tendremos

$$Q = 100\,000 \times 900 \frac{10,16 - 0{,}0043 \times 0{,}602\, Q}{500} 0{,}602$$

resultando

$$Q=3915 \text{kg.}$$

i

$$Q \cos \alpha=3915 \times 0{,}602=2357 \text{ kg.}$$

Pero, tenemos la ecuacion

$$P+Q \cos \alpha=350 \times 8=2800 \text{ kg.}$$

Por consiguiente

$$P=2800-2357=443 \text{ kg.}$$

El momento en la mitad del tramo será:

$$M'_{\mathrm{m}}=350 \times 8 \times 4-443 \times 8-2357 \times 4=-1772 \text{ kg. m.}$$

Tendremos pues como valor del momento máximo en la mitad del tramo

$$M_{\mathrm{max}}=7488+1772=9260 \text{ kg. m.}$$

lo que corresponde a un *trabajo máximo* de

$$\frac{T}{S}=\frac{M \text{ max}}{\frac{I}{V}}=\frac{926000}{18000}=51{,}^{\mathrm{k}}4 \text{ por cm.}^2$$

Compresion lonjitudinal de las vigas-sopandas. — Hai que añadir al trabajo anterior el trabajo debido a la compresion lonjitudinal. Como en el caso examinado mas atras, supondremos que la viga-sopanda deba resistir sola este esfuerzo. La compresion total de las torna-puntas debida a la carga rodante i al peso muerto es:

$$Q \text{ total}=5395+3915=9310 \text{ kg.}$$

La compresion lonjitudinal siendo:

$$Q \sin \alpha=9310 \times 0{,}798=7429 \text{ kg.}$$

el trabajo a la compresion tendrá el valor

$$\frac{7429}{900} = 8^{k},_{2} \text{ por cm.}^2$$

i el trabajo máximo total será:

$$\frac{T}{S} \text{ total} = 51^{k},4 + 8^{k},2 = 59^{k},6 \text{ por cm.}^2$$

§ 3.—VIGA CON VIGA-SOPANDA I DOS SISTEMAS DE TORNAPUNTAS.—TRAMO DE 24 METROS

62. Algunas veces, para tramos mas largos que los anteriores, se emplean vigas inferiores con viga-sopanda en la parte central i con un doble sistema de tornapuntas (Lámina VII, fig. 1). El cálculo exacto de un semejante sistema es bastante complejo; pero, como los puentes de esta clase se emplean a veces en Chile, no estará demas indicar de qué manera se puede tratar la cuestion, tanto mas cuando los autores no dan datos tan precisos sobre el particular.

Aplicaremos nuestro estudio a un tramo de 24 metros de largo, compuesto de vigas de 35 × 35, con vigas-sopandas i torna-puntas de las mismas dimensiones. Como la cuestion que nos ocupa sale del programa que nos hemos trazado, no resolveremos el problema de una manera completa como hicimos anteriormente, pero estableceremos las ecuaciones definitivas de tal manera que no subsista ninguna dificultad para su resolucion.

Trataremos la cuestion por el método de las deformaciones. El empleo de la grafostática estará casi obligado, pues la solucion analítica acarrea complicaciones mui grandes que hacen el método mui poco práctico. Los trazados gráficos simplifican mucho el problema en cuanto a la determinacion de las flechas, i empleándolos mostraremos una vez mas cuan grande es el auxilio que presta la grafostática para la resolucion de problemas de este jénero, i como por medio de algunos trazados gráficos de elásticas se consigue finalmente determinar varios elementos cuyo cálculo seria mui laborioso.

Sea pues: 1.° una viga $A\ B$ (Lámina VII, fig. 1) de 35 × 35 de seccion i de 24 metros de largo; 2.º con una viga-sopanda de igual seccion i de 8 metros de largo, colocada en la parte central $E\ F$; 3.º sostenida por cuatro torna-puntas de 35×35 que apoyan la viga en C, E, F i D.

Para tramos tan largos, hai economía en reducir el número de vigas inferiores, juntándolas con piezas trasversales. Supondremos pues que el número de vigas sea tres, i que las piezas trasversales que sirven de apoyo al tablonaje disten 1^m25 de eje a eje. Las 3 vigas distarán 2^m00 de eje a eje. Estudiemos la viga del centro. Con un tramo de 24 metros, no es la carga rodante sino que la carga uniforme de 400 kgs. por m.², cuando cubre a todo el puente la que dará el estado de solicitacion mas desfavorable. Distando las vigas 2^m00 entre sí, esta sobrecarga será

$$400^k \times 2 = 800 \text{ kg. por metro corrido de viga.}$$

Peso muerto.—Admitiremos un peso muerto de 800 kgs. por metro corrido de viga. Como la sobrecarga uniforme es de 800 kilógramos, la carga total uniformemente repartida por metro corrido de viga que nos servirá para el cálculo, será de 1600 kilógramos.

63. *Ecuaciones.*—Sean:

P = las reacciones sobre los apoyos A i B.
Q = la compresion de las tornas-puntas en C i D.
Q' = la compresion de las torna-puntas en E i F.

Estas torna-puntas producirán respectivamente reacciones verticales $Q \cos \alpha = R$ i $Q' \cos \alpha' = R'$

Tendremos la ecuacion

$$2\,P + 2\,Q \cos \alpha + 2\,Q' \cos \alpha' = p\,L = 1600^k \times 24 \qquad (21)$$

Ademas, nombrando f_C i f'_E las flechas en C i E, i expresando la compresion $f_C \cos \alpha$ i $f'_E \cos \alpha'$ de las torna-puntas de lonjitud σ i σ', tendremos las ecuaciones

$$Q = E\,\omega \frac{f_C \cos \alpha}{\sigma} \qquad (22)$$

$$Q' = E\,\omega \frac{f'_E \cdot \cos \alpha'}{\sigma'} \qquad (23)$$

Como las flechas f_C i f'_E son producidas por la carga uniforme p = 1600 kgs., i por las reacciones verticales R i R' de las torna-puntas, tendremos:

$$f_C = \phi\ (p, R, R') \tag{24}$$

$$f'_E = \phi'\ (p, R, R') \tag{25}$$

Tenemos pues un sistema de 5 ecuaciones que nos permitirán determinar las 5 incognitas

$$P, R = Q \cos \alpha \quad R' = Q' \cos \alpha' \quad f_C \text{ i } f'_E.$$

Siendo:

a) f_p, f_R i f_R' las flechas producidas en C o D respectivamente por la carga uniforme p o las reacciones R o R',

b) $f'_p, f'_R, f'_R{}'$ las flechas producidas en E o F respectivamente por p, R o R',

Tendremos

$$f_C = f_p - f_R - f_R' \tag{24'}$$

$$f'_E = f'_p - f'_R - f'_R{}' \tag{25'}$$

Es para la determinacion de f_p, f_R, f_R' f'_p, f'_R, $f'_R{}'$ que emplearemos los trazados gráficos.

1. Determinacion de f_R i f'_R (Lam. VII, fig. 2, 3 i 5).—Bajo la accion de dos fuerzas Q cos $\alpha = R$ aplicadas en C i D, el lugar de los momentos toma la forma $A\ C'\ D'\ B$.

Hemos dividido el área en varias partes cuyas líneas de separacion son CC', EE', MM', FF', DD'. Concentrando estas áreas parciales en su centro de gravedad i considerándolas como fuerzas aisladas, el lugar de los momentos relativo a este caso, i trazado con una distancia polar $E\ I$, dará la elástica que coincide con la fibra deformada en C, E, M, F, D. Lo mismo que en los casos estudiados anteriormente, hai que tener cuidado de cambiar la distancia polar cada vez que el trozo estudiado cambia de seccion. Las figuras 2, 3 i 5 dan todos los detalles de las escalas. Será pues inútil entrar en nuevas esplicaciones. Nos bastará recordar que la escala de las deformaciones será

$$\frac{500}{R}$$

Por consiguiente, midiendo directamente sobre el depurado las flechas en C i E, o D i F, tendremos

$$f_R = 3^{cm},65 \times \frac{R}{500} = 0^{cm},0073\ R$$

$$f'_R = 5^{cm},25 \times \frac{R}{500} = 0^{cm},0105\ R$$

Determinacion de $f_{R'}$ i $f'_{R'}$.—Estas flechas se han determinado idénticamente de la misma manera que las del caso anterior. Siguiendo atentamente los trazados del depurado se comprenderá fácilmente el modo de proceder.

Los resultados son las siguientes:

$$f_R' = 5^{cm},30 \times \frac{R'}{500} = 0^{cm},0106\ R'$$

$$f'_R' = 8^{cm},05 \times \frac{R'}{500} = 0^{cm},0161\ R'$$

Determinacion de f_p i f'_p.—El lugar de los momentos debido a la carga uniforme es una parábola. Hemos dividido otra vez (fig. 2) el área total en áreas parciales, cuyas líneas de separacion se encuentran en C, E, M, F, D. El trazado de la elástica (fig. 5) se hace como en los casos anteriores. Segun las escalas adoptadas e indicadas en el depurado, la escala de las deformaciones será:

$$\frac{100.000.000}{100 \times 20.000.000} = \frac{1}{20}$$

Por consiguiente, las flechas f_p i f'_p valdrán:

$$f_p = 7^{cm},75 \times 20 = 155\ \text{cm.}$$

$$f'_p = 11^{cm},4 \times 20 = 228\ \text{cm.}$$

Síguese que las ecuaciones (24) i (25) tendrán la forma definitiva:

$$f_C = 155^{cm} - 0^{cm},0073\ R - 0^{cm},0106\ R' \qquad (24'')$$

$$f'_E = 228^{cm} - 0^{cm},0105\ R - 0^{cm},0161\ R' \qquad (25'')$$

Reemplazando en las ecuaciones (22) i (23), tendremos

$$\underset{\sim}{Q} = E\,\omega \frac{155 - 0{,}0073\ \underset{\sim}{Q} \cos \alpha - 0{,}0106\ \underset{\sim}{Q}' \cos \alpha'}{\sigma} \cos \alpha \qquad (22')$$

$$\underset{\sim}{Q}' = E\,\omega \frac{228 - 0{,}0105\ \underset{\sim}{Q} \cos \alpha - 0{,}0161\ \underset{\sim}{Q}' \cos \alpha'}{\sigma'} \cos \alpha' \qquad (23')$$

con la ecuacion

$$P + \underset{\sim}{Q} \cos \alpha + \underset{\sim}{Q}' \cos \alpha' = \tfrac{1}{2}\ 1600^{k} \times 24 \qquad (21)$$

i recordando que

$$E = 100000 \quad \omega = 1225^{cm} \quad \cos \alpha = \cos 45^{\circ} = 0{,}707$$

$$\cos \alpha' = \cos 63^{\circ} 30' = 0{,}446 \quad \sigma = 566^{cm}, \quad \sigma' = 894^{cm}$$

tendremos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incognitos P, $\underset{\sim}{Q}$ i $\underset{\sim}{Q}'$ que se resolverá con la mayor facilidad.

Conocido el estado de solicitacion, se determinarán los momentos máximos i se fijará el trabajo máximo de las maderas. No podríamos afirmar que las dimensiones propuestas sean convenientes. Las hemos adoptado únicamente para desarrollar el método de cálculo, i de ninguna manera podrán servir para hacer especificaciones sin verificacion mas detallada.

---

§ 4.—DEL DESLIZAMIENTO LONJITUDINAL DE LAS VIGAS I VIGAS-SOPANDAS

64. *Introduccion.* — En el cálculo de la flexion hemos admitido que la viga i la viga-sopanda trabajan como una pieza única. Para que esto se verifique no basta justaponer simplemente las piezas, pues nada se opondria al deslizamiento lonjitudinal de una sobre la otra. Por este motivo se interponen de trecho en trecho cuñas jeneralmente de madera dura, i se aprietan las dos piezas una contra la otra por medio de pernos, o lo que es mejor, por medio de abrazaderas, que producen un contacto mas completo entre las maderas.

Hai interes en estudiar los esfuerzos que se desarrollan en el área de contacto, i en calcular las dimensiones que sea necesario dar a las piezas que tienen que impedir el deslizamiento.

Para mas claridad, consideramos la viga con viga-sopanda como si fuera una sola pieza apoyada por sus dos estremos; i cargada en su punto medio de un peso P, cuyo valor máximo estudiaremos luego.

La resistencia de los materiales enseña que el esfuerzo de deslizamiento horizontal por unidad de superficie a la distancia z del eje neutro tiene por espresion

$$\theta_z = \frac{K}{b\,I}\int_z^m z'\,d\,\omega$$

siendo:

K = el esfuerzo de corte en el punto considerado,

b = el ancho de la seccion a la distancia z del eje neutro,

I = momento de inercia principal de la seccion,

$\int_z^m z' d\omega$ = momento estático con respecto al eje neutro de la seccion desde z hasta la fibra estrema que dista m del eje neutro.

En el caso especial que nos ocupa, la seccion es rectangular. Tendremos pues:

$$I = \tfrac{1}{12}\,b H^3 = \tfrac{2}{3}\,b\,m^3$$

i

$$\theta_z = \frac{K}{b\,I}\int_z^m z' d\,\omega = \frac{K\,b\,(m^2 - z^2)}{2\,b \times \frac{2}{3}\,b\,m^3} = \frac{3\,K\,(m^2 - z^2)}{4\,b\,m^3}$$

Cuando una carga aislada P obra en el punto medio del tramo, K tiene un valor constante desde el estremo hasta el punto de aplicacion de la carga, valor igual a $\frac{P}{2}$, i que cambia de signo, conservando siempre su mismo valor absoluto, en la otra mitad de la pieza. El deslizamiento lonjitudinal es pues constante en cada mitad de la pieza. Llamando a la media lonjitud del tramo, el deslizamiento total que se produce en una mitad de la pieza será:

$$\theta_z \times a\,b = \frac{3\,P\,(m^2 - z^2)\,a}{8\,m^3}$$

En la otra mitad se producen deslizamientos iguales a esos pero de direccion contraria. El deslizamiento lonjitudinal total, haciendo abstraccion del signo, sobre el largo de la superficie de contacto será:

$$\theta = \frac{3\ P\ L\ (\mathrm{m}^2 - z^2)}{8\ \mathrm{m}^3} \tag{27}$$

En el caso de que el área de contacto coincida con el eje neutro, es decir en el caso de unirse dos piezas de igual altura, tenemos $z = o$, i el deslizamiento total tiene por valor

$$\theta = \frac{3\ P\ L}{8\ \mathrm{m}}$$

i como

$$2\ \mathrm{m} = H$$

$$\theta = \tfrac{3}{4}\frac{P\ L}{H} \tag{27'}$$

65. *¿Cuál será el valor que debemos dar a P?*—Acordándonos de que tenemos que juntar las dos piezas de tal manera que resistan como una pieza única, vemos que P será la mayor fuerza aislada que la pieza compuesta pueda soportar con seguridad en su punto medio.

La flexion exije que

$$\tfrac{1}{4}\ P\ L < R\ \frac{I}{V}$$

Tendremos pues

$$P_{\max} = 4\ \frac{R}{L}\ \frac{I}{V}$$

i en el caso presente

$$P_{\max} = \frac{8\ R\ b\ \mathrm{m}^2}{3\ L} \tag{28}$$

Introduciendo este valor límite en las fórmulas (27) i (27′) tendremos por valor del deslizamiento total

$$\theta = \frac{8\ R\ b\ m^2\ (m^2 - z^2)}{8\ m^3} = \frac{R\ b}{m}(m^2 - z^2) \tag{29}$$

$$\theta = \frac{8\ R\ b\ m^2}{8\ m} = R\ b\ m = \tfrac{1}{2}\Omega \tag{30}$$

Se ve pues que, principalmente en el caso de una superficie de separacion colocada a media altura, la fórmula que da el deslizamiento lonjitudinal total es mui sencilla.

A primera vista, parece estraño que dicho deslizamiento sea independiente de la lonjitud de la pieza i de la carga P. Pero esta anomalía aparente se esplica acordándose de que la seccion Ω es funcion de la lonjitud L i del peso P. Para que quede mas claro este hecho supongamos que una viga compuesta de dos piezas descanse sobre dos apoyos estremos distantes de L. Sea Ω la seccion total de estas dos piezas que han de trabajar como una pieza única. Colocando un peso P en el medio del tramo, podemos aumentar este peso hasta que la madera al trabajar por flexion, alcance a los límites de la resistencia permanente R, i es precisamente en ese momento que el esfuerzo de deslizamiento lonjitudinal total sobre el área de contacto tiene por valor la espresion (29) o (30), segun el caso.

66. *Determinacion del número de cuñas.*—Estudiemos la resistencia por compresion de las cuñas. Los rebajos hechos en cada viga tienen el medio espesor de la cuña $\frac{h}{2}$, en todo el ancho b; los esfuerzos de compresion se obran pues "de cada lado" sobre un área $\frac{bh}{2}$, es decir al total sobre un área bh. La presion no es igual en toda la altura. Admitiendo que los esfuerzos obedezcan a la lei del triángulo, la presion media será $\frac{R}{2}$, i la compresion total de cada cuña tendrá por valor

$$\frac{R\,b\,h}{2}$$

De ahí resulta el número n de cuñas o llaves necesario para equilibrar el esfuerzo de deslizamiento θ dado por las fórmulas (29) i (30); pues, tenemos la ecuacion de condicion

$$\tfrac{1}{2}\,R\,b\,h\,n=\theta \qquad (31)$$

i de ahí se deduce fácilmente n.

67. *Ancho de las cuñas.*—Las cuñas tienen que resistir al rasgamiento debido al esfuerzo lonjitudinal de deslizamiento. Es sabido que la resistencia de las maderas por rasgamiento es diferente segun que el esfuerzo se produce paralelamente o nor-

malmente a las fibras. Haí gran ventaja en colocar las cuñas de tal manera que las fibras queden perpendiculares a la superficie de contacto de las piezas justapuestas. Con maderas duras, podemos admitir una resistencia por rasgamiento de 18 kgs. por cm.^{2} Llamemos R' esta resistencia, el ancho x de las cuñas se obtendrá por la relacion.

$$R' \, n \, b \, x = \theta$$

resultando, en el caso de dos piezas de misma altura,

$$x = \frac{R}{2 R'} h$$

En jeneral $R = 70^{\text{kg}}$ por cm.^{2}
Tendremos pues

$$\frac{R}{2 R'} = \frac{70^{\text{k}}}{2 \times 18} = \frac{70}{36} = 2 \text{ mas o menos.}$$

lo que esplica por qué el ancho de las llaves es jeneralmente el doble de su espesor.

68. *De las abrazaderas.*—No basta juntar las dos piezas por medio de cuñas, es necesario ademas hacerlas solidarias por medio de abrazaderas. Para darse cuenta de esta necesidad basta examinar lo que pasa entre las dos vigas por motivo de, la presencia de las cuñas (*).

Consideremos una llave *abcd* (Lám. IV fig. 6). La presion sobre *ae* i *fc* no es nunca uniforme sino que aumenta desde *e* hasta *a*. La resultante p no estará pues aplicada en el medio de *ae*. Supondremos que el punto de aplicacion se encuentre en las $\frac{2}{3}$ de *ae* desde *e*. Sobre *fc* se desarrollan esfuerzos iguales i de direccion contraria, i estas dos fuerzas orijinan un par cuyo valor será

$$p \times \frac{2}{3} h$$

(*) *Annales des Ponts et Chaussées*, 1856, 2ème semestre, p. 382 et stes.

i cuyo efecto es hacer jirar la cuña. Esta rotacion producirá sobre las caras *ab* i *cd* presiones repartidas desigualmente. Admitamos otra vez que el punto de aplicacion de la resultante se encuentre en los $\frac{2}{3}$ de *ab*, i que los límites de la resistencia permanente esten alcanzados en *b*. La presion total p' sobre *ab* valdrá:

$$p' = \frac{R\,l\,e}{2}$$

Sobre la cara *cd* se producirá un esfuerzo igual pero de direccion contraria, i estas dos fuerzas formarán un par cuyo valor será:

$$\frac{R\,l\,e}{2} \times \frac{l}{3} = \frac{1}{6}\,R\,l^2\,e$$

i que tiende a separar una de otra a las dos piezas *A* i *B*. Pues las abrazaderas son las que tendrán que impedir esta separacion.

Jeneralmente van colocadas a media distancia entre dos cuñas. Si p_1 es el esfuerzo que se desarrolla en cada una, resultará un par que valdrá:

$$p_1\,l_1$$

siendo l_1 la distancia de eje a eje entre dos cuñas.

Ese par debe equilibrar el que tiende a producir la separacion de las dos piezas. Tendremos pues:

$$p_1\,l_1 = \frac{1}{6}\,R\,l^2\,e$$

resultando

$$p_1 = \frac{1}{6} R\,e \frac{l^2}{l_1}$$

fórmula en la cual:

R=coeficiente de resistencia de la madera por compresion.

e=ancho de las piezas=b.

l=ancho de las cuñas, es decir la lonjitud segun la direccion de la viga.

l_1 = distancia de eje a eje de las abrazaderas.

p_1 = tension producida sobre cada abrazadera por una de las cuñas vecinas.

Pero, como no hai mas que una abrazadera entre dos cuñas, resulta una tension p_1 de cada cuña. La tension total producida sobre cada abrazadera colocada en la mitad de la distancia entre dos cuñas tiene pues por valor:

$$T = \tfrac{1}{3}\, R\, b \frac{l^2}{l_1} \tag{32}$$

Por medio de esta fórmula se determinará, pues, fácilmente la seccion que conviene dar a las abrazaderas.

69. *Aplicaciones.*—Aplicaremos la teoría que precede al ensamble de la viga i de la viga-sopanda de los tramos de 10^{m} i de 16 metros estudiados anteriormente.

1.° Tramo de 10 metros.—Hai que ensamblar una viga-sopanda de 20 x 20 con una viga de 20 x 30. La lonjitud es de 5 metros.

a). *Esfuerzo de deslizamiento.*—Como la superficie de rasgamiento no pasa por el eje central, el glizamiento total se deducirá de la fórmula (29).

$$\theta = \frac{R\, b}{m}(m^2 - z^2) \tag{29}$$

Tenemos, espresando el todo en cm. i kg.

$$R = 70 \quad b = 20 \quad m = 25 \quad z = 5$$

$$\theta = \frac{70 \times 20}{25}(625 - 25) = \frac{70 \times 20 \times 600}{25}$$

resultando

$$\theta = 33600 \text{ kg}$$

b) *Numero de cuñas.*—El número de cuñas se obtendrá por la fórmula (31).

$$\tfrac{1}{2}\, R\, b\, h\, n = \theta \tag{31}$$

Admitamos siempre $R=70^k$, aunque rigorosamente se podria aumentar este valor porque las cuñas se hacen jeneralmente de madera dura. Sea 2″ o 5 cm. el espesor de las cuñas. Entrarán en rebajos de 1″ en cada una de las piezas sobre un ancho de 0^m20. Tenemos pues

$$\frac{h}{2}=2^{cm},5 \quad b=20^{cm}.$$

La fórmula (31) dará pues

$$70\times 20\times 2,5\times n=33600$$

resultando

$$n=\frac{33600}{70\times 20\times 2,5}=9,6$$

Como no hai ningun inconveniente en hacer trabajar la madera dura de las cuñas a un taso un poco mas alzado que la madera ordinaria, podremos limitarnos en 9 cuñas.

c) Ancho de las cuñas.—Hemos demostrado mas atras que conviene dar a las cuñas un ancho doble de su espesor. El ancho será, pues, de $0^m,10$.

d) Abrazaderas.—Colocaremos las abrazaderas en la mitad de la distancia entre dos cuñas.

La fórmula (32) da la tension

$$T=\tfrac{1}{3}\,R\,b\frac{l^2}{l_1}$$

Tenemos

$R=70$ kg. por cm²

$b=20$ cm.

$l=$ancho de las cuñas$=10$ cm.

$l_1=$distancia de eje a eje de las cuñas$=50$ cm.

Tendremos pues.

$$T=\tfrac{1}{3}\,70\times 20\times\frac{100}{50}=933 \text{ kg.}$$

Se ve, pues, que el esfuerzo de estension de las abrazaderas es relativamente reducido. Ademas, se reparte sobre dos secciones. Como la fórmula que da la tension de las abrazaderas ha sido establecida haciendo ciertas hipótesises, cuya exactitud puede no ser absoluta, será prudente hacer trabajar el fierro a un taso bastante bajo, tanto mas cuanto que el apretamiento de las tuercas produce una tension inicial. Adoptando un fierro de 35×6 mm., nos encontraremos en buenas condiciones. Esta seccion corresponde a un fierro redondo de 17 mm. de diámetro mas o ménos. El fierro inferior, que sirve para fijar la abrazadera, tendrá 50 mm. de ancho i 10 mm de espesor.

2.° *Tramo de 16 metros.*—Las dos piezas por ensamblar tienen 30×30 de seccion i 8 metros de lonjitud.

a) Deslizamiento horizontal.—El área de contacto de las dos piezas, coincide con el eje neutro. El esfuerzo de deslizamiento se obtendrá, pues, por la fórmula (30)

$$\theta = \tfrac{1}{2}\, R\, \Omega \qquad (30)$$

Tenemos

$$R = 70^{k} \quad \Omega = 30 \times 60 = 1800 \text{ cm}^2.$$

$$\theta = \tfrac{1}{2} 70 \times 1800 = 63000 \text{ kg}$$

b). *Numero de cuñas.* Tenemos la fórmula (31)

$$\tfrac{1}{2}\, R\, b\, h\, n = \theta \qquad (31)$$

Tomando cuñas de 5 cm., tendremos:

$$R = 70^{k} \quad b = 30 \quad h = 5$$

i

$$\tfrac{1}{2} 70 \times 30 \times 5 \times n = 63000$$

resultando

$$n = \frac{63000}{70 \times 30 \times 2.5} = 12$$

El número de cuñas será igual a 12. Teniendo la viga 8 metros de lonjitud, la distancia de las cuñas será de $0^{m},65$.

c) Ancho de las cuñas.—El ancho será de $0^{m},10$, como en el caso anterior.

d) Abrazaderas.—El esfuerzo de estension de estas piezas se obtendrá por la fórmula (32)

$$T = \frac{1}{3} R\, b \frac{l^2}{l_1} \qquad (32)$$

En el caso actual tenemos

$$R = 70^k \quad b = 30 \quad l = 10 \quad l^1 = 65$$

$$T = \frac{2}{3} 70 \times 30 \times \frac{100}{65} = 1077 \text{ kg.}$$

esfuerzo poco diferente del que hallamos en el caso anterior Podremos, pues, adoptar tambien abrazaderas de 35 × 6 mm.

CAPÍTULO V

De los puentes con tres o dos vigas inferiores

§ 1. INTRODUCCION

70. En todo lo que precede hemos supuesto que el puente se compone de vigas inferiores distantes de 1 m,20 a 1 m,25 de eje a eje. Pero las dimensiones calculadas así indican que, a medida que aumenta la luz, el volúmen de las vigas crece rápidamente; habrá, pues, un límite, pasado del cual será ventajoso reducir el número de vigas inferiores a tres i despues a dos. Es necesario, en estos casos, unir las vigas por medio de piezas trasversales o *travesaños*, cuyas dimensiones serán mui pequeñas en el caso de tres vigas, pero que tendrian secciones mas grandes en el caso de dos vigas. Esto se verificará principalmente para vigas-barandas distantes de 5 metros.

Se comprende, pues, que en el caso de tres vigas inferiores, los travesaños no disten mas de 1 m,25 de eje a eje, i que el tablonaje tome directamente apoyo sobre estas piezas. Pero, en el caso de dos vigas inferiores i principalmente para vigas-barandas, se presenta la duda de si no hai economía en espaciar mas los travesaños, juntándolos por una série de piezas lonjitudinales que se llaman *longuerinas.* Éstas se colocarán con $1^{m},25$ de intervalo mas o ménos i servirán de apoyo al tablonaje.

Se ve que disminuyendo el número de vigas, la cuestion se dilata i se complica. No solamente habrá que calcular las longuerinas i las viguetas, sino que habrá tambien que buscar la solucion mas económica para el enrejado del tablero. Tendremos, pues, que examinar los puntos siguientes:

1.º El cálculo de las vigas;
2.º El cálculo de las longuerinas;
3.º El cálculo de los travesaños o de las viguetas;
4.º La indagacion de la solucion mas ventajosa en cada caso.

§ 2. CÁLCULO DE LAS VIGAS

71. *Caso de tres vigas inferiores.*—Las vigas son juntadas por medio de travesaños distantes en $1^{m},25$. Estas últimas piezas tienen bastante resistencia para que se pueda reservar en sus dos estremos una parte volada, lo que permitirá acercar mas las vigas inferiores. Conservando siempre cinco metros de ancho libre entre las barandas, podremos adoptar un sistema de tres vigas lonjitudinales que disten 2 metros de eje a eje.

Es visible que la viga central tendrá que soportar un esfuerzo mayor que las vigas laterales. Pongamos la carreta de 8 toneladas en el eje del puente i sobre un travesaño. Considerando a éste como pieza colocada de nivel sobre las 3 vigas, la reaccion sobre el viga del centro será:

$$R = 2 \times 4000^{k} \times 0{,}68 = 5440 \text{ kg. } (*)$$

La reaccion máxima sobre las vigas laterales se producirá cuando una rueda de la carreta se mueva sobre esta viga. Esta reaccion será de 4000 kg., la misma que en el caso de vigas inferiores distantes de $1^{m},25$. Será, pues, necesario hacer un nuevo cálculo para las vigas centrales, miéntras que para las

(*) Véase Planat, Mecanique appliquée.

vigas laterales podrán adoptarse, sin error sensible, las dimensiones calculadas en el caso de cinco vigas inferiores.

Nos parece inútil entrar en nuevos detalles en cuanto al cálculo de la viga central, pues seria simplemente repetir para otro estado de solicitacion lo que, con muchos detalles, hemos espuesto en los estudios anteriores. Hemos hecho el cálculo de los puentes con tres vigas inferiores para las mismas luces que anteriormente, es decir para tramos de 5^m, 8^m i 10 metros sin vigas sopandas; i para tramos de 10^m, 13^m i 16 metros con vigas-sopandas. Veremos ulteriormente las dimensiones, cuando tratemos de establecer las especificaciones.

72. *Caso de dos vigas inferiores.*—Como en el caso anterior, las vigas se encuentran unidas por medio de travesaños. Supondremos que las vigas disten de 4 metros de eje a eje. Para el cálculo, se pondrá una rueda de la carreta sobre una de las vigas, de suerte que la otra quedará en el medio de la lonjitud del travesaño. La reaccion máxima sobre el apoyo será de 6 toneladas. Esta es la carga que habrá que introducir en los cálculos, i que será puesta sobre el travesaño lo mas cerca de la mitad del tramo. Las dimensiones de las vigas están indicadas en los cuadros de las especificaciones que formaremos mas adelante.

GUILLERMO OTTEN
Injeniero honorario de Puentes i Calzadas de Béljica
contratado por el Gobierno de Chile.

(Continuará)