ESTUDIOS SOBRE LA TEORIA JEOMÉTRICA

DE LAS FUNCIONES

Si me atrevo a entregar a la publicidad una série de estudios sobre la teoría de las funciones, lo hago contando con la benevolencia de los lectores. No me propongo abrir nuevos caminos a la ciencia, pero sí, reunir en el estrecho marco de "Estudios" ideas sobre la naturaleza de las funciones que han sido propagadas esencialmente desde las cátedras de las universidades suecas, inglesas i alemanas i que no he encontrado consignadas en ninguna de las obras matemáticas escritas en castellano. En estos estudios me apartaré léjos del camino acostumbrado de la teoría analítica i relacionaré la jeometría con el análisis, siguiendo las teorías de Riemann, Klein, Lie i otros que citaré oportunamente.

No reclamo el honor de que los artículos que van a publicarse se deban en su totalidad a indagaciones propias; me contento con el modesto mérito de haber reunido ideas dispersas en las revistas de matemáticas i de haberlas vulgarizado en este país. Estimaré recompensado mi trabajo, si logro ganar nuevos amigos a esta clase de estudios que tan vivamente dejan preocupados a los círculos matemáticos del viejo mundo.

I

EL SISTEMA NUMÉRICO JENERAL

Las investigaciones matemáticas tienen por objeto las nociones de la estension i del número. Correspondientes a este doble objeto, se distinguen dos disciplinas principales de las matemáticas, que son la *Jeometría* i el *Análisis*. Como las nociones de la estension contienen las propiedades mas sencillas i comunes a todas las cosas que nos rodean, es evidente que las matemáticas han de ser el fundamento de todos nuestros conocimientos sobre la naturaleza.

En los fenómenos que observamos en torno nuestro, notamos cambios contínuos. Los que mas frecuentemente se presentan son cambios de lugar o sea movimientos. Con la nocion del movimiento está inseparablemente unida la otra de *la continuidad es decir, de una cohesion no interrumpida en el espacio i de una sucesion no interrumpida en el tiempo* (1). Ahora bien, describir los fenómenos del movimiento en toda su duracion, es indicar todos sus estados sucesivos por medio de números. Por esto, para que el sistema numérico nos pueda servir para describir los movimientos, es preciso que consista en una série contínua de cantidades, no interrumpida en ninguna parte por un intervalo.

El sistema numérico que usamos en los cálculos, comprende los números enteros positivos i negativos, los números racionales e irracionales i los números imajinarios i complejos. Es verdad, se ha tratado de dar mas ensanche a este sistema i se han inventado, a este propósito, sistemas superiores de números. Pero mas adelante vamos a hacer ver que el sistema que acabamos de señalar forma una entidad que no admite complemento alguno i que las invenciones hechas con el propósito de dar mas alcance a los cálculos matemáticos, tienen un valor mui

(1) Véase Harnack, *Elementos del cálculo diferencial e integral.* Leipzig, 1881.

inferior i no sirven para resolver problemas que, con los medios suministrados por nuestro sistema actual, no hubieran podido resolverse.

Los números, desde luego, pueden ser divididos en naturales i artificiales, comprendiéndose bajo el primer grupo únicamente los números enteros i positivos desde 1 en adelante. Este primer grupo de números forma el *sistema primitivo de los números.* La série natural de los números se enjendra por la agregacion sucesiva de la unidad, pues el número que, para el matemático de hoi, es una nocion abstracta, susceptible de cualquiera modificacion, en aquella época remota en que se despertaba la intelijencia del jénero humano, no ha podido significar otra cosa que un *conjunto de cosas indivisibles.*

Las dificultades que se habrán opuesto a la introducion de los números fraccionarios i negativos solo pueden comprenderse comparándolas con aquellas con que ha tropezado la introduccion de los números complejos en nuestros cálculos modernos. Éstas llegan hasta tal punto que en algunos libros de áljebra una ecuacion que tiene soluciones imajinarias o complejas, se reputa hasta hoi dia como absurda, aunque ella no sea el enunciado de un problema concreto que por su naturaleza no admita tales soluciones. Al contrario, como se verá mas adelante, la introduccion de los números complejos como parte integrante de nuestro sistema numérico, es el complemento natural, lójico i necesario del sistema de los números reales, como, en otro tiempo, la introduccion de los números fraccionarios i negativos completó la série natural de los números.

En el sistema primitivo o natural de los números se pueden resolver todos los problemas de la adicion i multiplicacion, miéntras la sustraccion i division, para ser ejecutables en todos los casos, ya exijen la introduccion de números artificiales, de los negativos i fraccionarios.

Antes de hablar de este segundo sistema numérico segun el órden lójico, séanos permitido tratar de las propiedades fundamentales de las operaciones directas, que son la adicion i la multiplicacion, propiedades que ya nos hacen distinguir el carácter jeneral del sistema numérico de que se hace uso hoi dia en las matemáticas.

Estas propiedades, en último análisis, se reducen a las tres que tienen su enunciado en las proposiciones siguientes:

1.° *La suma de números dados siempre tiene el mismo valor aunque se invierta el órden de la adicion*

Tenemos que

$$a+b\equiv b+a$$

Este teorema no puede ser deducido de nociones mas elementales, i por esto hemos de considerarlo como axioma.

2.° *Para sumar tres o mas números, basta formar la suma de un grupo cualquiera de ellos i agregar a esta la suma de otro grupo i así sucesivamente.*

Tenemos, segun esto, la fórmula:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n\equiv(a_1+a_2)+(a_3+a_4+\ldots+a_m)$$

$$=(a_{m+1}+\ldots+a_n)$$

Este teorema se deduce inmediatamente del teorema anterior.

Como en este sistema de los números naturales la multiplicacion no es mas que una adicion en que los sumandos son iguales, los dos teoremas que preceden, subsisten tambien para esta operacion, es decir, tenemos:

$$a\,.\,b\equiv b\,.\,a$$

$$a\,.\,b\,.\,c\equiv a\,.\,(b\,.\,c)\equiv(a\,.\,b)\,.\,c\equiv(a\,.\,c)\,.\,b$$

De la adicion i multiplicacion, por obedecer a los dos teoremas 1.° i 2.°, se dice que son operaciones *conmutativas* resp. *asociativas.*

El tercer teorema fundamental de este sistema natural resulta de una combinacion de la multiplicacion con la adicion i tiene el enunciado siguiente:

3.° *Para multiplicar una suma por un número cualquiera, basta multiplicar cada uno de los sumandos por este número i sumar los productos parciales.*

Subsiste, por esto, la fórmula:

$$a.(b+c+d+...)=ab+ac+ad+...$$

Por obedecer al teorema 3.°, este sistema se llama *distributivo.*

Estas tres propiedades del sistema primitivo de los números, señaladas por los teoremas 1.°, 2.° i 3.°, son exactamente aquellas que relacionan las operaciones abstractas del cálculo con las condiciones concretas de los problemas que nos ofrecen las ciencias naturales i la práctica del comercio. Cada sistema numérico que satisface a las tres condiciones en cuestion, es aplicable tambien a los problemas concretos, i recíprocamente, para resolver problemas concretos, es preciso usar un sistema numérico que cumpla con estas tres condiciones.

El *segundo sistema numérico* en que ya figuran números artificiales o sea de aquellos que deben su oríjen a las operaciones aritméticas, i nó a la simple accion de contar, comprende todos los números enteros, positivos i negativos. Se hace necesario pasar del sistema primitivo a este segundo, si se exije que la sustraccion, operacion inversa a la adicion, sea ejecutable en todos los casos. Pues, en el primer sistema, la sustraccion solo puede llevarse a cabo en el caso de que el minuendo sea mayor que el sustraendo. Si estos dos números contienen igual número de unidades, el resultado ya no pertenece al sistema natural de los números, sino que ha de introducirse en el cálculo el primero de los números artificiales que es el cero, para espresar este resultado.

La definicion del 0 está, pues, contenida en la fórmula

$$a-a=0.$$

Si el minuendo es menor que el sustraendo, i si se exije que la diferencia sea un número comprendido todavía en nuestro sistema de números, hemos de introducir los números negativos. El número negativo $-m$ se define, segun esto, por la igualdad siguiente:

$$a-(a+m)\equiv -m$$

La adopcion de este sistema superior envuelve una modificacion en la definicion de la nocion numérica. Los números ya no denotan un conjunto determinado de individuos, sino que forman una série de cantidades separadas unas de otras por intervalos iguales. La interpretacion jeométrica de este sistema es la siguiente: Sobre una recta indefinida aplicamos un número infinito de partes iguales, de manera que tenemos sobre esta recta una série indefinida de puntos equidistantes que representan exactamente nuestro segundo sistema numérico. Pues denotando por 0 a cualquiera de estos puntos, por 1, 2, 3,... a los que siguen a su derecha i por -1, -2, -3,... a los que siguen a su izquierda, tenemos representados sobre la línea recta todas las cantidades comprendidas en nuestro sistema, correspondiendo a cada número dado un punto determinado de la línea recta.

Establecer las reglas para la adicion i sustraccion de números negativos, no ofrece dificultad alguna. Pero, como arriba hemos espuesto, para que este sistema sirva para resolver problemas concretos, es preciso que satisfaga a los tres teoremas señalados por los números 1.°, 2.°, 3.° Se alcanza esto estableciendo las dos reglas siguientes:

4.ª *Un número positivo multiplicado por un negativo, o recíprocamente, da por resultado un número negativo;* i

5.ª *Un número negativo multiplicado por otro negativo produce un número positivo;*

lo que da las fórmulas:

$$(+a).(-b)=-ab$$

$$(-a).(+b)=-ab$$

$$(-a).(-b)=+ab$$

Convenido en que se observen estas reglas en el cálculo, el nuevo sistema cumple tambien con las tres condiciones del sistema natural.

Debe observarse que estas dos reglas no pueden ser demostradas, sino que son *arbitrarias*. Se han hecho esfuerzos para deducirlas de la misma nocion de lo negativo, pero todos estos esfuerzos han sido estériles. Conocidísimo es que se pretende deducir la llamada regla de los signos de la siguiente definicion de la multiplicacion: La multiplicacion es una operacion que tiene por objeto buscar una cantidad llamada producto que se componga, en magnitud i en signo, de otra llamada multiplicando, como el multiplicador se compone de la unidad positiva. Admitiendo esta definicion, es indudable que no puede haber objecion alguna a las conclusiones que se hacen i que se encuentran sentadas en cada texto de áljebra; pero debe prevenirse que esta definicion tiene un defecto mui palpable. Se habla en ella de la manera de que el multiplicador se compone de la unidad positiva. Ahora bien, ¿de qué manera se compone un multiplicador negativo de la unidad positiva? Indudablemente de ninguna manera. La definicion que hemos dado arriba de los números negativos, no establece mas que una sucesion de valores, representada mui correctamente por la interpretacion jeométrica. I de esta definicion, la única que se puede dar de los números negativos, ninguna lójica del mundo puede deducir que un número negativo multiplicado por otro da un número positivo. Todas estas llamadas demostraciones no son mas que esplicaciones mui útiles para la enseñanza de los elementos de las ciencias matemáticas (1).

Hankel, en su obra intitulada: *Teoría de los sistemas de números complejos*, ha establecido por primera vez el principio de la *permanencia de las leyes formales* que dice:

Si se pasa del sistema primitivo de números a los superiores (que comprenden mas especies de números que aquél), es preciso establecer para el cálculo ciertas reglas arbitrarias, pero necesarias,

(1) Sucede con estas reglas otro tanto como en mecánica con el principio del paralelógramo de las fuerzas. Todos los esfuerzos de deducir este principio de otros mas sencillos o mas jenerales han sido estériles i lo serán siempre a causa de su misma naturaleza.

para que los sistemas superiores tengan las mismas propiedades características del sistema primitivo.

Pues si no se siguiera tal procedimiento, los sistemas superiores no se podrian aplicar a la resolucion de los problemas concretos; se construirian matemáticas cuyas leyes, aunque fundadas en principios de por sí posibles i en deducciones lójicas admisibles, se diferenciarian tanto mas de las que se establecen siguiendo el principio de Hankel, cuanto mas nos internáramos en la especulacion matemática. Las matemáticas ya no serian el ausiliar poderoso de la esperiencia como las apreciamos, sino un juego fútil de la imajinacion, sin utilidad alguna.

Para que la division $\frac{a}{b}$ sea ejecutable tambien en el caso de que a no es un múltiplo de b, es preciso pasar al tercer sistema numérico que comprende, ademas de los números enteros, positivos i negativos, las fracciones racionales. Para conseguir este fin, es preciso introducir en el cálculo la nueva nocion numérica $+\frac{1}{b}$, siendo b un número entero cualquiera, $\frac{1}{b}$ es el número que multiplicado por b da 1. De consiguiente, multiplicando $\frac{1}{b}$ por a, resulta $\frac{a}{b}$. En la naturaleza no existen tampoco los números fraccionarios, i en cuanto a ellos subsiste, en jeneral, lo mismo que hemos espuesto arriba hablando de los números negativos.

No nos proponemos aquí desarrollar todas las reglas sobre las cuatro primeras operaciones ejecutadas con fracciones racionales, porque se encuentran sentadas en todo texto de aritmética; pero nos permitimos agregar algunas palabras sobre las particularidades de este tercer sistema.

Llámase *perfecto* un sistema numérico, si todas las operaciones ejecutadas con números comprendidos en este sistema, dan por resultado números del mismo sistema. Segun esta definicion, ni el sistema natural ni el segundo son perfectos, pues proponiendo, por ejemplo, en el primer sistema la sustraccion $5-8$, nos resulta -3, número que es estraño a este sistema. Pero el sistema de los números racionales es perfecto, si limitamos el cálculo a las cuatro primeras operaciones aritméticas, pues todo problema de adicion, sustraccion, multiplicacion o division cuyos datos son números racionales, tiene una solucion racional.

La representacion gráfica de la série indefinida de los números racionales se verifica de la manera siguiente: Apuntamos sobre una recta indefinida primero todos los puntos equidistantes que representan los números enteros. Para encontrar entónces el punto que representa la fraccion $\frac{m}{n}$ comprendida entre los números enteros a i $a+1$, se divide la distancia del punto a al $a+1$ en partes iguales, i siendo

$$m=na+x,\ x<n$$

se observa que el x^{mo} punto de division a partir del punto a, es el punto que representa al valor de la fraccion $\frac{m}{n}$

Es evidente que el número de cantidades racionales es infinito i que siempre será posible formar dos fracciones racionales cuya diferencia δ es arbitrariamente pequeña. Los puntos de la línea recta que representan tales puntos, estarán, por esto, mui próximos uno al otro, pero no serán inmediatos, sino que habrá entre ellos un pequeño intervalo. Pues por mas pequeña que sea δ, siempre será posible intercalar entre las dos fracciones un número cualquiera de fracciones de la misma naturaleza. Siendo $\frac{a}{b}$ i $\frac{a_1}{b_1}$ las dos fracciones i δ su diferencia, de manera que

$$\frac{a_1}{b_1}-\frac{a}{b}=\delta,$$

entónces todas las fracciones racionales

$$\frac{(n-1)\,ab_1+a_1\,b}{nbb_1},\ \frac{(n-2)\,ab_1+2\,a_1\,b}{nbb_1},\ldots\ldots$$

$$\frac{ab_1+(n-1)\,a_1\,b}{nbb_1}$$

serán mayores que $\frac{a}{b}$ i menores que $\frac{a_1}{b_1}$. El número de estas fracciones depende de n, i como n puede tener un valor cualquiera, el número de ellas puede ser mui grande tambien. De ahí se desprende una diferencia mui notable entre este sistema i los dos anteriores. Entre dos cantidades del tercer sistema hai siempre un número infinito de cantidades que pertenecen al mismo sistema, miéntras en los dos primeros sistemas dos cantidades están separadas por un número determinado de valores del mismo sistema.

Las operaciones aljebráicas de la elevacion a potencia i las dos inversas a ella, la estraccion de raiz i la operacion logarítmica, nos imponen la necesidad de introducir dos nuevas especies de números, los irracionales i los complejos. Ocupémonos, por ahora, de los primeros que, con los números racionales forman el *sistema de los números reales.* Podria motivarse la introduccion de los números irracionales por el desiderátum de ver comprendidos en nuestro sistema numérico todos los números que satisfacen a las ecuaciones aljebráicas de coeficientes enteros (1). Pues es evidente que al ménos algunas de las raices de la ecuacion

$$x^4 - 82\,x^2 - 288\,x - 47 = 0$$

han de ser números irracionales. Pero esta manera de motivar la introduccion de los números irracionales en el cálculo, da lugar a dudas, pues no se sabe si todos los números irracionales son raices de ecuaciones aljebráicas, o si acaso existen cantidades que no se pueden representar como raices de ecuaciones al-

(1) Obsérvese lo que dice, a este respecto, Félix Klein, eminente matemático de la Universidad de Göttingen i representante de la jeometría proyectiva en Alemania (Mathematische Annalen, Bd. XXXVII, 4. Heft., 1890): «Indudable que el motivo para introducir números irracionales en el cálculo, es la aparente continuidad del espacio. Pero, como yo no atribuyo ninguna exactitud a las ideas que se tienen sobre el espacio, no puedo tampoco deducir de ahí la *existencia* de lo irracional. Al contrario, la teoria de las irracionalidades, segun mi criterio, debe fundarse sobre ideas esclusivamente aritméticas, teoría que, gracias a los axiomas, aplicamos, en seguida, a la jeometría para conseguir, tambien en esta disciplina, aquella exactitud de las discusiones que es la condicion primordial de las deducciones matemáticas.»

En un estudio posterior que tratará sobre los fundamentos de la jeometría proyectiva i an-euclidiana, tendremos que ocuparnos detalladamente de estas i otras ideas del profesor citado.

jebráicas de coeficientes enteros. En efecto, hace apénas dos decenios que un matemático frances (1) trató de demostrar que el número $e = 2{,}7182818...$ no puede ser la raiz de una ecuacion aljebráica. La demostracion que nos ha dado este sabio notable, es algo complicada, i no es fácil decidir si sus conclusiones son del todo exactas o nó. Por esto parece mas conveniente fundar la introduccion de los números irracionales en la necesidad en que nos vemos de poseer un sistema contínuo de números para poder describir completamente los fenómenos que se nos presentan en la naturaleza, pues hemos visto que el sistema de los números racionales no satisface a esta condicion. Como, en este modo de ver, el número irracional es un valor comprendido entre dos fracciones racionales consecutivas (2), se desprenden luego los dos procedimientos para determinar los valores de las cantidades irracionales. No será posible evaluar estos números por medio de procedimientos finitos, aun cuando se pueda darles, por medio de la denotacion aljebráica, una forma concisa, como sucede, por ejemplo, con los valores $\sqrt{2}$, log 3, etc. Los números irracionales deben ser considerados como los límites de séries indefinidas de números racionales, ya sea que se encuentren siempre entre números racionales pareados cuya dife-

(1) Hermite, *Sur la fonction exponentielle*. Paris, 1874.

(2) El lector no dejará de imponerse de una aparente contradiccion contenida en esta definicion. Ántes se ha demostrado que entre dos fracciones racionales, por mas próximos que sean sus valores uno al otro, siempre se encuentra un número indefinido de fracciones racionales, de manera que seria imposible determinar dos fracciones racionales separadas por un solo valor, o sea dos fracciones consecutivas. El inconveniente con que tropezamos en esta ocasion, se esplica de un modo sencillo. Hemos sentado que todo valor racional es representado por un punto de una línea recta. Ahora, por mas que continuemos la division de una línea recta, nunca, por este procedimiento, llegamos a determinar un punto, sino que siempre tendremos un elemento infinitamente pequeño de la línea. Así, como en jeometría se dice que una línea recta se enjendra por el movimiento de un punto, en áljebra debe decirse que la série contínua de los números reales trae su orijen de la variacion contínua i en un mismo sentido de una cantidad. El método analítico que hemos seguido en nuestra esposicion, naturalmente debe conducirnos a la contradiccion ántes observada: para esplicar la nocion *contínua*, es preciso seguir un método sintético.

rencia es cada vez menor i converje hácia cero, o que sean los límites hácia los cuales converjen séries indefinidas o sea sumas de un número infinito de términos. Por ejemplo, para el número $e = 2{,}71828\ldots$ se encuentran los siguientes límites pareados α i β:

$$
\begin{array}{ll}
\alpha = 2 & \text{i } \beta = 3 \\
\alpha_1 = 2{,}7 & \text{i } \beta_1 = 2{,}8 \\
\alpha_2 = 2{,}71 & \text{i } \beta_2 = 2{,}72 \\
\alpha_3 = 2{,}718 & \text{i } \beta_3 = 2{,}719 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{etc.}
\end{array}
$$

Como las diferencias $\beta_i - \alpha_i$ forman una série de valores que tienden hácia cero, será posible encerrar el valor de e entre dos valores de α i β, cuya diferencia tiene un grado arbitrario de pequeñez, de manera que esta definicion de los números irracionales nos permite determinarlos con una exactitud prescrita.

Tambien se puede decir que e es el límite hácia el cual converje la série de valores que sigue i cuyos términos se forman segun una regla conocida:

$$2;\ 2+\frac{1}{2};\ 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{1.2.3};\ 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4};\ldots\ldots$$

Se nota luego que este método permite alcanzar el mismo grado de exactitud que el anterior; la exactitud depende del número de términos que se usa para la evaluacion.

Debe observarse que tambien los números racionales pueden ser representados como límites de tales séries; por ejemplo, 2 es el límite de la série:

$$1;\ 1+\frac{1}{2};\ 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2;\ 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3;\ldots\ldots$$

Pero miéntras que los números racionales pueden escribirse por medio de un número determinado de cifras sin recurrir a la denotacion aljebráica, el método de la aproximacion sucesiva es el único aplicable para los números irracionales.

No nos detendremos aquí en deducir las reglas del cálculo con los números irracionales, pues éstas se encuentran sentadas en todo buen texto de cálculo diferencial; nos contentamos con enunciar la regla jeneral como sigue:

Para ejecutar una operacion cualquiera con datos irracionales, se efectúa el cálculo con valores aproximados de ellos, i el resultado obtenido de esta manera será tanto mas exacto cuanto mas alto haya sido el grado de aproximacion usado en los datos.

Como resúmen de las consideraciones anteriores, podemos dar ahora la definicion exacta de lo que es un número. Héla aquí:

Entiéndese por número una série infinita de valores racionales que se construye, para cada caso especial, segun ciertas reglas:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_m, \ldots\ldots, a_{m+n} \ldots\ldots$$

Prescindiendo del signo aljebráico, los términos de esta série no sobrepasan un valor determinado en cada uno de los diversos casos. Esta série debe cumplir ademas con la condicion de que para todo valor δ (supuesto tan pequeño como se quiera) exista un término a_m de la série que satisfaga a la desigualdad:

$$\text{abs.}\ (a_{m+n} - a_m) < \text{abs.}\ \delta\ (1).$$

Aunque el sistema de los números reales es contínuo i, de consiguiente, puede servir para la resolucion de los problemas de la física i jeometría, no cumple con la segunda condicion de ser perfecto. Las raices pares de los números negativos no son cantidades reales, sino imajinarias i complejas: los logaritmos de números negativos i las funciones ciclométricas, como, por ejemplo, arc sen 3, nos ofrecen otros tantos casos de la irrealidad. Nos vemos obligados, por esto, a completar el sistema de los números reales por los imajinarios i complejos. A este nuevo sistema llamaremos jeneral, i para justificar el nombre vamos a demostrar:

(1) El símbolo abs. significa que los valores de las a i δ se consideran como positivos.

1.° que es contínuo;

2.° que cumple con las tres condiciones de ser conmutativo, asociativo i distributivo;

3.° que es perfecto; i

4.° que no puede haber sistema superior que comprenda éste como caso especial.

1.° *El sistema jeneral es contínuo*

El sistema de los números reales es de una sola dimension, el jeneral, de dos dimensiones, pues la forma de los números complejos ordinarios es $a+i\,b$, siendo $i=+\sqrt{-1}$ i a i b números reales, susceptibles de todo valor. Ademas, si $a+i\,b$ se considera variable, las variaciones de sus partes a i b son independientes unas de otras. Luego, siendo $\Delta\,a$ i $\Delta\,b$ resp. las variaciones de a i b, la diferencia

$$a+\Delta\,a+i\,(b+\Delta\,b)-(a+i\,b)=\Delta\,a+i\,\Delta\,b$$

puede hacerse menor que cualquiera valor $\delta_1+i\,\delta_2$, por pequeño que se le suponga, lo que, en lenguaje analítico, significa que $a+i\,b$ varía contínuamente.

2.° *El sistema jeneral es conmutativo, asociativo i distributivo*

Para demostrar esta tésis, haremos uso de una definicion mas jeneral de los números complejos, que comprende como caso especial el que los números complejos tengan la forma $a+i\,b$.

En jeneral se llaman números complejos o pareados aquellos que constan de dos partes variables, independientes una de otra, sin fijar préviamente el modo como deben combinarse. Designemos tales números por el símbolo $(a,\,b)$. Mas arriba hemos espuesto que, al pasar de un sistema inferior a otro superior, debemos procurar que los números nuevamente introducidos obedezcan a las leyes formales del sistema primitivo. Esto se alcanza estableciendo ciertas reglas convencionales. Ahora bien, para que el sistema jeneral cumpla con esta condicion, es preciso adoptar, para el cálculo, las tres reglas siguientes:

1.ª Dos números pareados se suman, sumando aisladamente sus partes, o sea

$$(a, b)+(a_1, b_1)=(a+a_1, b+b_1)$$

2.ª La multiplicacion de dos números pareados se efectúa segun la fórmula siguiente:

$$(a, b).(a_1, b_1)=(aa_1-bb_1, ab_1+a_1 b)$$

3.ª Un número pareado es igual a cero, si sus dos partes lo son:

$$(0, 0)=0.$$

Para demostrar que cualquier sistema de números pareados que satisface a estas tres reglas, obedece tambien a las tres leyes formales del sistema primitivo, basta hacer ver que las tres fórmulas anteriores se reducen a las que subsisten para el sistema real, si en ellas se pone $b=0$, $b_1=0$; i que un producto de dos números pareados no puede ser igual a cero sino en el caso de que lo sea uno de sus factores.

La primera parte de lo que nos proponemos demostrar es evidente, pues $(a, 0)=a$ i (a, b) no puede ser igual a (b, a), porque, de otro modo, los números de la forma (a, b) serian simples sumas o productos de números reales.

Para demostrar la segunda parte, supongamos que (a, b) i (a_1, b_1) sean dos números pareados cuyo producto es igual. Tenemos entónces:

$$(a, b).(a_1, b_1)=0$$

Pero, segun la segunda de nuestras reglas, debe ser:

$$(a, b).(a_1, b_1)=(aa_1-bb_1, ab_1+a_1 b).$$

Combinando estas dos fórmulas, deducimos

$$(aa_1-bb_1, ab_1, ab_1+a_1 b)=0,$$

de donde sacamos, segun la tercera regla:

$$\text{A.}\quad\begin{cases} aa_1 - bb_1 = 0 \\ ab_1 + a_1 b = 0 \end{cases}$$

Supongamos ahora que $(a, b) \gtrless 0$, de manera que ni a ni b pueden ser iguales a cero, entónces debemos demostrar que necesariamente

$$(a_1, b_1) = 0$$

o lo que es lo mismo

$$a_1 = 0 \text{ i } b_1 = 0.$$

Elijiendo a i b como incógnitas, el sistema A. es un sistema de dos ecuaciones homojéneas del primer grado para su determinacion. Ahora bien, la teoría de tales sistemas nos enseña que, si su determinante no desaparece, los valores de las incógnitas deben ser iguales a cero. Segun nuestra suposicion, ni a ni b es igual a cero, luego

$$\begin{vmatrix} a_1, & -b_1 \\ b_1, & a_1 \end{vmatrix} \equiv a_1^2 + b_1^2 = 0$$

Pero la suma de dos cuadrados solo puede desaparecer si las dos bases son iguales a cero. Tenemos, por esto,

$$a_1 = 0,\ b_1 = 0$$

o bien

$$(a_1, b_1) \equiv 0, \text{ q. e. d.}$$

Hemos dicho ántes que los números complejos de la forma $a + i\,b$, de los cuales nos ocuparemos esclusivamente en adelante, son un caso especial de los números pareados. Una simple verificacion basta para hacer ver que estos números obedecen tambien a las tres reglas arriba establecidas. Por ejemplo, se sabe que

$$(a + i\,b)\,(a - i\,b) = a^2 + b^2$$

De la segunda regla deducimos:

$$(a, b).(a, -b) = (a^{2\prime} + b^2, 0)$$

lo que corresponde a la fórmula $a^2 + b^2$, etc.

3.° *El sistema jeneral es perfecto*

Ántes de emprender esta demostracion, séame permitido decir algunas palabras sobre las diversas formas que pueden tomar los números complejos i sobre su representacion gráfica.

Como el sistema de los números complejos es de dos dimensiones, no es posible representar los números de este sistema por los puntos de una línea recta: se necesita para esto una superficie. El plano es la superficie mas sencilla i, ademas, la jeometría analítica nos enseña que, por medio de un sistema ortogonal de coordenadas, cada punto del plano se determina uniformemente por los valores reales x e y de sus coordenadas. Ahora bien, reuniendo estos dos números en el complejo $x + iy$, resulta el teorema:

Si en un plano dado se fija un sistema ortogonal de coordenadas, adoptando, a este propósito, una unidad de medida, tenemos que a cada punto de este plano corresponde un número complejo, i recíprocamente, todo número complejo determina uniformemente un punto del plano (lám. 1.ª, fig. 1.ª).

Los puntos del eje de las abscisas representan los números reales i los del eje de las ordenadas, los imajinarios (de la forma iy). Esta representacion de los números complejos se llama la "construccion de Gauss", pues este matemático la adoptó por primera vez, de un modo claro i determinado, en su primera disertacion del año 1799, fundándose en los trabajos prévios de Euler. (Introductio, etc. I, cap. VIII) (1).

Fácil es ver que el sistema de los números complejos puede ser representado tambien de otra manera. No es necesario que el sistema de coordenadas sea ortogonal ni que la superficie sea

(1) La noticia mas antigua sobre una representacion gráfica de los números complejos se encuentra en los Novi Comm. Acad. Petrop. 1750.

plana, pero la construccion de Gauss lleva ventajas considerables sobre otras construcciones, permitiendo, como luego veremos, dar a los números complejos una forma mui ventajosa para el cálculo.

Sea P (lám. 1.ª, fig. 2.ª) el punto correspondiente al número $x+iy$: entónces, si se denota por r la distancia del punto P al oríjen 0 de las coordenadas, tenemos las relaciones:

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \operatorname{sen} \phi$$

Luego, si r i ϕ son las coordenadas polares del punto P, el número complejo que le corresponde tiene la forma

$$r\phi \equiv r(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) \text{ (1)}$$

Si convenimos en que r tenga siempre un valor positivo, cualquiera que sea el cuadrante en que se encuentra P, i que ϕ varíe, a partir del eje OX, de 0 a 2π, el punto P está determinado uniformemente por los valores de r i ϕ, recíprocamente.

La cantidad $r = +\sqrt{x^2+y^2}$ se llama *módulo* (segun Argand, *Annales de Gergonne*, t. V, 1814) o *valor absoluto* (segun Weierstrass, *Journal für Mathematik*, t. 52) del número complejo, la cantidad ϕ *argumento* o *amplitud* (segun Cauchy).

Como cos ϕ i sen ϕ no pueden desaparecer simultáneamente, un número complejo es cero, si su módulo $r = +\sqrt{x^2+y^2}$ lo es, lo que exije que $x=0$, $y=0$.

Todos los números que tienen el mismo módulo corresponden a puntos situados en una circunferencia cuyo centro es el oríjen de las coordenadas. A todos los números con argumentos iguales corresponden los puntos de líneas rectas que parten del oríjen 0 (véase lám. 1.ª, fig. 3.ª). Si $\phi = c_1$ es la ecuacion de una de estas líneas rectas, $\phi = c_1 + \pi$ es la ecuacion que corresponde a su prolongacion mas allá del oríjen 0 (2).

(1) Esta representacion de los números complejos ha sido dada primero por Euler en su obra ántes citada.

(2) Como se observa, este modo de denotar números complejos, da lugar a notables simplificaciones en la denotacion de la jeometría analítica.

Un tercer modo de escribir números complejos se deduce por medio de consideraciones analíticas.

Tenemos que

$$\cos\phi = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} \pm \ldots\ldots \mp \frac{\phi^{2n}}{(2_n)!} + R \text{ (1)}$$

$$\operatorname{sen}\phi = \phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} \pm \ldots\ldots \mp \frac{\phi^{2n+1}}{(2_{n+1})!} R'$$

Multiplicando la segunda série por i i sumándola en seguida con la primera, tenemos que

$$\cos\phi + \mathrm{i}\operatorname{sen}\phi = \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} \mp \ldots\ldots + R\right) + \mathrm{i}\left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} \pm \ldots\ldots + R'\right)$$

Ordenando ahora segun potencias ascendentes de ϕ, i tomando en cuenta que

$$i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i,\ i^{4k} = 1,$$

fórmulas en que k puede tomar cada uno de los valores 0, 1, 2.... hasta ∞, se deduce

$$\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi = 1 + i\phi + \frac{(i\phi)^2}{2!} + \frac{(i\phi)^3}{3!} + \ldots\ldots + (R + iR')$$

Esta série compleja es converjente, pues, siendo R i R' respectivamente los restos de las séries $\cos\phi$ i $\operatorname{sen}\phi$, tenemos que

$$\lim R = 0 \text{ i } \lim R' = 0.$$

(1) $n! \equiv 1.2.3\ldots\ldots n.$

El resto de la série compleja es $R+i R'$, i como

$$\lim (R+i R')=\lim R+i \lim R'=0,$$

resulta que la série cos ϕ + i sen ϕ es converjente. Ahora bien, reemplazando en la série

$$e^{\phi}=1+\phi+\frac{\phi^2}{2!}+\frac{\phi^3}{3!}+\ldots\ldots$$

el valor de ϕ por $i\phi$, tenemos

$$e^{i\phi}=1+i\phi+\frac{(i\phi)^2}{2!}+\frac{(i\phi)^3}{3!}+\ldots\ldots$$

i deducimos de ahí que

$$\cos\phi+i \operatorname{sen}\phi\equiv e^{i\phi}$$

de manera que

$$x+iy\equiv r(\cos\phi+\text{i} \operatorname{sen}\phi)\equiv re^{i\phi}$$

Despues de esta breve esposicion, vamos a demostrar lo que nos hemos propuesto. Daremos por demostrado que el sistema jeneral es perfecto, cuando hayamos hecho ver que todas las operaciones cuyos datos son complejos, i todas las funciones de argumentos complejos nos suministran valores complejos, i que, de consiguiente, no es necesario introducir números superiores para espresar los resultados.

1.° *Adicion.*—Sean los números que se han de sumar $a+ib$ i a_1+ib_1. Entónces tenemos que

$$(a+ib)+(a_1+ib_1)=(a+a_1)+i(b+b_1).$$

La figura 4.ª de la lámina 1.ª nos da la construccion gráfica de la adicion.

Sean P i P_1 los dos puntos correspondientes a los números

$a+ib$ i a_1+ib_1, de manera que $OA=a$, $OB=a_1$, $PA=b$, $P_1B=b_1$; encontrar el punto P_2, representado por la suma

$$(a+a_1)+i\,(b+b_1).$$

Trácense las rectas OP i OP_1 i pásense por los puntos P i P_1 paralelas a OP_1 i OP respectivamente. El punto de interseccion de estas paralelas será el punto buscado P_2.

Para demostrar este resultado, bajaremos, desde el punto P_2, la recta $P_2\,C$ perpendicular a la OX, i trazaremos la recta $P_1\,D$ paralela a la OX. Se observa que los triángulos OPA i $P_1\,P_2\,D$ son iguales, resultando de ahí que

$$P_1\,D=BC=OA=a$$

$$P^2\,D=PA \qquad =b,$$

luego:

$$OC=a+a_1,\ \text{i}\ P^2\,C=b+b_1.$$

De la misma figura se desprende que el módulo de la suma P_2 está representado por la diagonal OP_2 del paralelógramo $OPP_2\,P_1$, i como OP_1 i P_1P_2 son los módulos de P i P_1 respectivamente, tenemos:

$$P_1\,O-P_1\,P_2 < OP_2 < P_1\,O+P_1\,P_2$$

o en otros términos:

El módulo de la suma de dos números complejos es mayor que la diferencia de los módulos de los sumandos i menor que su suma.

2.° *Sustraccion.*—Sean los números que van a restarse a_1+ib_1 i $a+ib$. Tenemos

$$(a_1+ib_1)-(a+ib)=(a_1-a)+\ i\,(b_1-b)$$

La construccion de este resultado es la misma del resultado anterior, si suponemos que los puntos dados sean P_2 i P_1, i el buscado P. Subsiste tambien el teorema de los módulos para la sustraccion.

Suponiendo variable uno de los datos de la adicion i sustraccion, miéntras que el otro tiene un valor fijo, estas operaciones se aplican a todos los puntos del plano, trasformándolos en nuevos puntos. ¿Será posible trasformar todo el plano para obtener el mismo resultado? Podemos obtenerlo imprimiendo un movimiento de traslacion a todo el plano, de manera que cada uno de sus puntos avance o retroceda cierto espacio en direccion del eje de las abscisas i ejecute un movimiento análogo en direccion del eje de las ordenadas, movimientos que se componen segun la lei cinemática de los movimientos. Se notará que a la adicion o sustraccion de números complejos corresponde, en jeometría analítica, una trasformacion de un sistema de coordenadas ortogonales en otro sistema paralelo, cuyo oríjen sea distinto del anterior.

3.° *Multiplicacion.* Si m es un número entero i positivo,

$$(a+i\,b)m$$

significa que $a+i\,b$ ha de repetirse m veces como sumando o que, segun las reglas de la adicion,

$$(a+i\,b)\,.\,m=am+i\,bm.$$

Correspondiente a esto, se define jeneralmente: (véase lo dicho sobre los números pareados, páj. 10)

$$\begin{aligned}(a+i\,b)\,.\,(a_1+i\,b_1)&=a_1\,(a+i\,b)+i\,b_1\,(a+i\,b)\\ &=aa_1+i\,b\,a_1+i\,a\,b_1+i^2\,bb_1\\ &=(aa_1-bb_1)+i\,(ba_1+ab_1)\end{aligned}$$

Se ve que la operacion así definida queda conmutativa.

La construccion de esta fórmula seria algo complicada: por esto es mas ventajoso escribir los números complejos en una de las otras dos formas que acabamos de dar. Tomemos primero

$$a+i\,b=r\,(\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi)$$

$$a_1+i\,b_1=r_1\,(\cos\phi_1+i\operatorname{sen}\phi_1)$$

Tenemos entónces:

$$r.(\cos\phi+i\,\mathrm{sen}\,\phi).r_1(\cos\phi_1+i\,\mathrm{sen}\,\phi_1)$$
$$=rr_1[\cos\phi\cos\phi_1-\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\phi_1+i(\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi_1+\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\phi_1)]$$
$$=rr_1[\cos(\phi+\phi_1)+i\,\mathrm{sen}\,(\phi+\phi_1)]$$

Usando la tercera forma, tenemos:

$$a+ib=re^{i\phi},\ a_1+ib_1=r_1\,e^{i\phi_1}$$

i como

$$re^{i\phi}.r_1\,e^{i\phi_1}=rr_1\,e^{i(\phi+\phi_1)}$$

conocemos que los resultados últimamente obtenidos tienen el enunciado comun:

El módulo del producto de dos números complejos es igual al producto de los módulos de los factores, i el argumento del producto es igual a la suma de los argumentos de los factores.

Ahora la construccion ya no ofrece dificultad alguna. Sean P i P_1 los dos puntos definidos por los números $a+ib$ i a_1+ib_1, entónces tenemos

$$\begin{array}{l} OP=r,\ \angle POX=\phi \\ OP_1=r_1,\ \angle P_1OX=\phi_1 \end{array} \quad \text{(véase lám. 1.ª, fig. 5.)}$$

El punto P_2 que representa el producto de los dos números complejos, debe estar situado sobre una recta OZ que parte del oríjen O, siendo

$$\angle ZOX=\phi+\phi_1.$$

La distancia de P_2 a O tiene por medida el valor de rr_1. Este producto se halla por medio de la proporcion:

$$1:r::r_1:rr_1.$$

Por esto, para encontrar el punto P_2 sobre la recta OZ, aplicamos sobre la recta OP, desde O, la unidad convenida, i sobre la recta OZ la distancia $OP_1 = r_1$ desde el mismo punto O. Trazando entónces las paralelas AB i PP_2, tenemos:

$$OA : OP :: OB : OP_2,$$

o bien

$$1 : r :: r_1 : OP_2,$$

de donde

$$OP_2 = rr_1.$$

Despues de tratar de la division hablaremos de la trasformacion del plano que corresponde a la multiplicacion de un valor variable por un valor constante.

(Continuará)

DR. RICARDO POENISCH
Profesor del Instituto Nacional

Lamina 1.ª

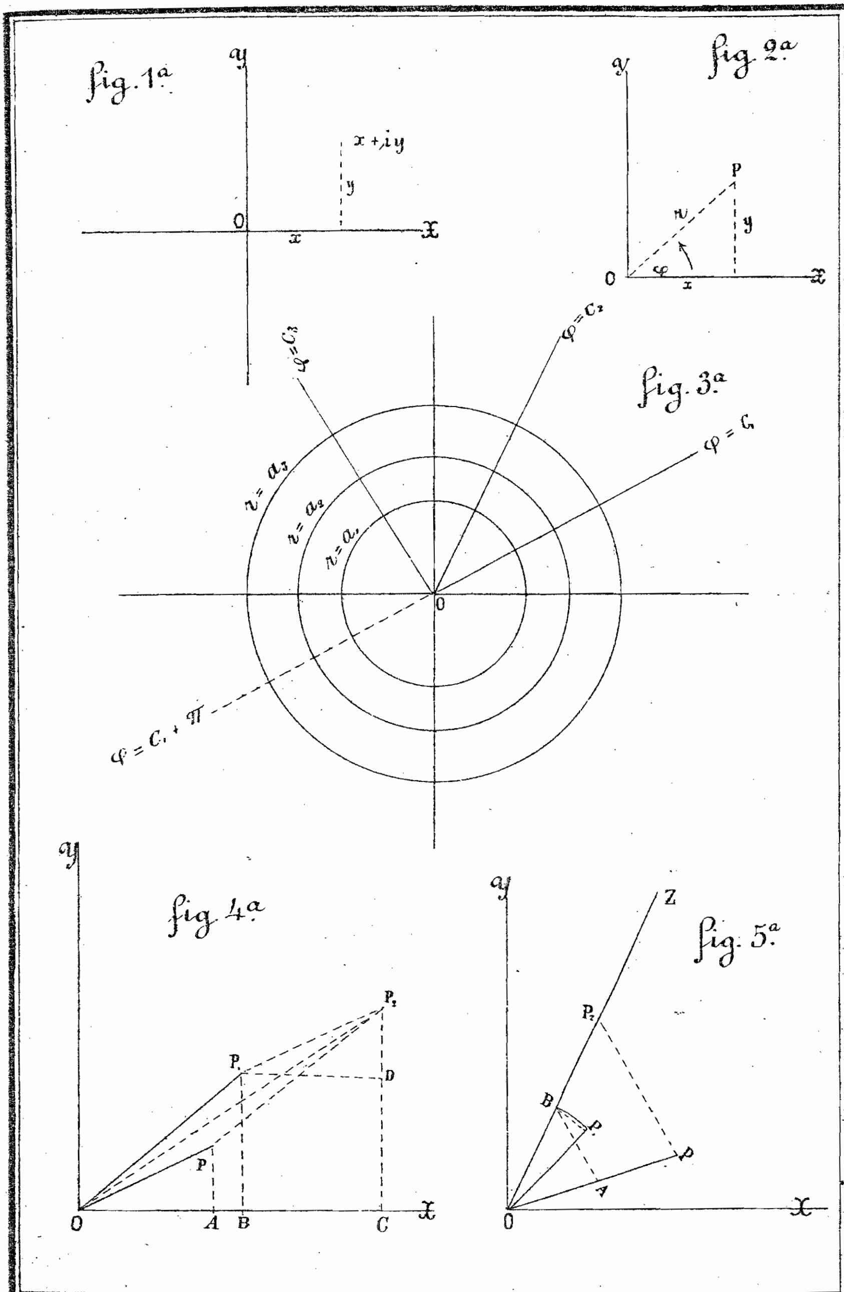
fig. 1.ª
y
x + iy
y
O
x
X
fig. 2.ª
y
P
r
y
O
φ
x
x
fig. 3.ª
φ = C₂
φ = C₃
φ = C₁
r = a₃
r = a₂
r = a₁
O
φ = C₁ + π
fig. 4.ª
y
P₂
P₁
D
P
O
A
B
C
X
fig. 5.ª
y
Z
P₂
B
P₁
P
A
O
X