MECÁNICA RACIONAL

CAPÍTULO XVII

(Continuacion)

III

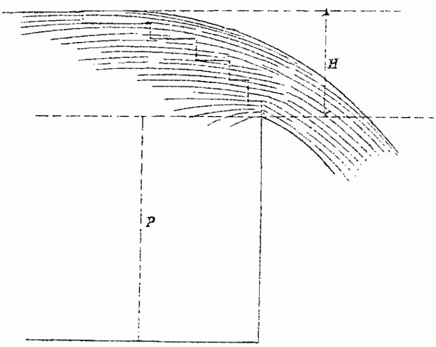
VERTEDEROS

Los vertederos, considerados en la hidraúlica, son orificios de forma rectangular cuyo borde superior está descubierto i cuyo borde inferior *(umbral)* es horizontal.

Para calcular el gasto de un vertedero se puede concebir que se haya colocado en el depósito, desde el umbral hasta el nivel superior del líquido, una série de paredes horizontales dispuestas en escalones, como en la figura 69.

La presencia de estas paredes hipotéticas cambia evidentemente el réjimen del derrame; sin embargo, si el espesor de cada pared es infinitamente pequeño respecto de su distancia a la pared siguiente, la avaluacion del gasto será suficientemente aproximada.

Fig. 6.9



Sea l el ancho del vertedero, h la distancia de una de las paredes hipotéticas al nivel superior, dh el intervalo constante de las paredes, el gasto, por uno de los orificios, será

$$m' l dh \sqrt{2gh}$$

Sea H la distancia del umbral al nivel superior del líquido en el depósito i Q el gasto total; se tendrá

$$Q = \int_0^H m' l dh \sqrt{2gh}$$

Se han hecho experiencias directas sobre el derrame por orificios horizontales cuya altura era mui pequeña respecto del ancho i se ha averiguado que el coeficiente m' de contraccion quedaba comprendido entre 0,60 i 0,70.

Para mas sencillez, supondremos m' constante; la integracion da entónces

$$Q = \frac{2}{3} m' l H \sqrt{2gH}$$

Pongamos

$$Q = m l H \sqrt{2gH} \tag{9}$$

Se ve que el valor de m debe estar comprendido entre $\frac{2}{3} \times 0{,}60$ i $\frac{2}{3} \times 0{,}70$ o bien entre 0,40 i 0, 47. Es efectivamente lo que indica la observacion.

En la realidad el coeficiente m es influenciado: 1.º por la velocidad de llegada del agua sobre el vertedero; 2.º por la forma del umbral i por su altura encima del fondo del depósito; 3.º por la contraccion lateral de la napa líquida; 4.º por los fenómenos que se producen por debajo de la napa líquida cuando el umbral tiene el mismo ancho que el canal.

Como los vertederos se emplean con mucha frecuencia en la avaluacion del gasto de las corrientes de agua, daremos aquí las fórmulas de *Bazin*, publicadas últimamente en los "Anales de Puentes i Calzadas de Paris".

Sea u la velocidad de la corriente que llega sobre el vertedero i P la profundidad del canal debajo de la cresta del umbral (se dice que P es la altura del vertedero). Para tomar en cuenta la velocidad u se reemplaza, en la fórmula (9), H por $H + a\frac{u^2}{2g}$; entónces

$$Q = ml\left(H + a\frac{u^2}{2g}\right)\sqrt{2g\left(H + a\frac{u^2}{2g}\right)}$$

O bien

$$Q = mlH\sqrt{2gH}\left(1 + a\frac{u^2}{2gH}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Como u^2 es jeneralmente mui pequeño respecto de $2\,gH$ se reemplaza la potencia $\frac{3}{2}$ del binomio por su desarrollo i se desprecia el cuadrado de $\frac{u^2}{2\,gH}$, entónces

$$(10) \qquad Q = m\left(1 + \frac{3}{2}\,a\,\frac{u^2}{2g\,H}\right)lH\sqrt{2g\,H}$$

Ahora el gasto Q es ligado a la velocidad u por la relacion

$$ul(P + H) = Q$$

Luego

$$\frac{u^2}{2gH} = \frac{Q^2}{l^2(P+H)^2}\,\frac{1}{2gH}$$

En el segundo miembro se puede reemplazar Q por su valor aproximado

$$mlH\sqrt{2gH}$$

entónces

$$\frac{u^2}{2gH} = \frac{m^2 l^2 H^2\, 2gH}{l^2(P+H)^2}\,\frac{1}{2gH} = m^2\left(\frac{H}{P+H}\right)^2$$

La fórmula (10) da, por consiguiente,

$$Q = m\left\{1 + \frac{3}{2}\,\alpha\, m^2\left(\frac{H}{P+H}\right)^2\right\} lH\sqrt{2gH}$$

Esta fórmula ha sido comprobada por Bazin; i un gran número de esperiencias le han dado los valores siguientes de los coeficientes

$$m = 0{,}405 + \frac{0{,}003}{H}$$

$$\frac{3}{2}\,\alpha\, m^2 = 0{,}55$$

De manera que la fórmula que se debe emplear en la práctica es

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} Q = m\left\{1 + 0{,}55\left(\dfrac{H}{P+H}\right)^2\right\} lH\sqrt{2gH} \\ m = 0{,}405 + \dfrac{0{,}003}{H} \end{cases}$$

Cuando H es comprendido entre $0^m{,}10$ i $0^m{,}30$ se puede adoptar simplemente la fórmula

$$(\beta)\qquad Q = \left\{0{,}425 + 0{,}21\left(\frac{H}{P+H}\right)^2\right\} lH\sqrt{2gH}$$

Estas fórmulas muestran que, para determinar el gasto Q de una corriente de agua, se puede simplemente colocar en la corriente un vertedero i, una vez el réjimen permanente establecido, medir H. La altura H no se mide evidentemente encima del umbral sino por medio de una nivelacion entre la cresta del umbral i el nivel del líquido a una distancia suficiente del vertedero.

Cuando el ancho del vertedero es igual al ancho del canal se observa que, debajo de la napa líquida, el agua sube a cierta altura mas o ménos grande i a veces hasta el mismo umbral del vertedero, el coeficiente m de la fórmula (9) debe ser entónces modificado. El señor Bazin ha obtenido por ejemplo los siguientes resultados:

H	m	
m.		
0,22	0,45	napa aislada por debajo.
0,34	0,45	id.
0,54	0,45	id.
0,51	0,47	id.
0,09	0,42	el agua sube por debajo, pero no llega hasta la cresta del umbral.
0,14	0,44	
0,19	0,44	
0,22	0,47	
0,24	0,51	el agua sube hasta la cresta, pero la napa líquida no tiene una forma estable.
0,27	0,51	
0,31	0,48	la napa está constantemente negada por debajo.
0,33	0,50	
0,39	0,49	

El coeficiente m varía tambien con la forma del umbral pero, en la práctica, es siempre fácil colocar, encima del umbral de un vertedero una cresta delgada i vertical de manera a encontrarse en el caso estudiado por M. Bazin i poder entónees aplicar las fórmulas (α) o (β).

Cálculo del ancho l que se debe dar a un vertedero para regularizar el nivel del agua en un depósito.

Sea A el área de la seccion horizontal del depósito, l el ancho incógnito del vertedero i Q el gasto de alimentacion del depósito. (Se supondrá que Q es conocido en funcion del tiempo). Se quiere determinar l de tal manera que la altura H del líquido encima del umbral quede comprendido entre ciertos límites determinados.

Durante el tiempo dt el volúmen de agua que llega sobre el vertedero es $Q dt$ i el volúmen de agua que pasa por encima del umbral es $ml H \sqrt{2g H}\, dt$, luego la cantidad de agua que queda en el depósito es

$$Q\, dt - ml H \sqrt{2g H}\, dt$$

De ahí resulta una surelevacion $d H$ del nivel i se tiene evidentemente

$$A\, d H = Q\, dt - ml H \sqrt{2g H}\, dt \tag{11}$$

La solucion rigorosa de este problema consistiria en reemplazar Q por su valor conocido en funcion del tiempo e integrar la ecuacion (11); se obtendria así una relacion tal como

$$F(H, t, l) = 0$$

entre las variables H i t i la incógnita l.

De esta relacion se deduciria el valor máximo H_m de H, espresada en funcion de l; finalmente se podria determinar l de manera que H_m quede menor que cierto límite H_0, fijado de antemano.

Esta solucion rigorosa es imposible porque no se puede integrar en jeneral la ecuacion diferencial (11). En la práctica se opera de la manera siguiente: el valor máximo H_m de H satisface a la condicion $\frac{dH}{dt}=0$, luego, segun (11), H_m satisface tambien a la ecuacion

$$(12) \qquad Q - m l H_m \sqrt{2g H_m} = 0$$

Si quiere que H_m sea menor que H_0 o bien que

$$m H_m \sqrt{2g H_m} < m H_0 \sqrt{2g H_0}$$

Reemplacemos el primer miembro por su valor deducido de (12) tendremos

$$\frac{Q}{l} < m H_0 \sqrt{2g H_0}$$

O bien

$$(13) \qquad l > \frac{Q}{m H_0 \sqrt{2g H_0}}$$

En esta última relacion, Q es incógnito; sin embargo, se conoce, por hipotésis, el gasto máximo Q_m de la corriente, luego el ancho l del vertedero satisfará evidentemente a la condicion (13) si se toma

$$(14) \qquad l = \frac{Q_m}{m H_0 \sqrt{2g H_0}} = \frac{Q_m}{0{,}42\, H_0 \sqrt{2g H_0}}$$

Tal es el valor de l que se adopta en la práctica.

CAPÍTULO XVIII

SOLUCION DE ALGUNOS PROBLEMAS PRÁCTICOS

Gasto por un orificio plano de dimensiones cualesquiera

Admitiremos que el gasto por un orificio de dimensiones cualesquiera es la suma de los gastos relativos a orificios de dimensiones infinitamente pequeñas cuya área total es igual al área del orificio considerado. Aunque la lejitimidad de esta hipótesis no esté comprobada, estamos en la obligacion de aceptarla hasta que se tenga otra mejor que substituirle.

Sean entónces: ω el área total del orificio, $d\omega$ un elemento de área situado en un punto M; x, y las coordenadas de M respecto de un sistema de dos ejes rectangulares situados en el plano del orificio i tales que OX sea horizontal; α el ángulo de OY con la vertical; supongamos que el punto O sea el centro de gravedad del área ω i sea H_c su distancia al nivel superior del líquido en el depósito; sea tambien h la distancia de M al mismo nivel, se tendrá

$$(1) \qquad h = H_c + y \cos \alpha$$

Ahora, si m es el coeficiente de contraccion, el gasto por el orificio $d\omega$ es

$$m \, d\omega \sqrt{2gh}$$

Luego el gasto total buscado Q será

$$Q = \int_\omega m \, d\omega \sqrt{2gh}$$

Consideremos m como constante i reemplacemos h por su valor (1), tendremos

$$Q = m \sqrt{2g} \int_\omega d\omega \sqrt{H_c + y \cos \alpha}$$

O bien

$$Q = m \sqrt{2g H_c} \int_\omega d\omega \left(1 + \frac{y \cos \alpha}{H_c} \right)^{\frac{1}{2}}$$

En los casos prácticos y es siempre menor que H_c, se puede entónces desarrollar el binomio que multiplica $d\omega$ i se tiene

$$Q = m \sqrt{2g H_c} \int_\omega d\omega \left(1 + \frac{\cos \alpha}{2 H_c} y - \frac{\cos^2 \alpha}{8 H^2_c} y^2 + \right)$$

O bien

$$Q = m\sqrt{2gH_c}\left\{\omega + \frac{\cos\alpha}{2H_c}\int y\,d\omega - \frac{\cos^2\alpha}{8H_c^2}\int y^2 d\omega + \dots\right\}$$

Como el punto O es, por hipotésis, el centro de gravedad del área, se tiene

$$\int y\,d\omega = 0$$

Sea, por otra parte, K el radio de jiracion del área, respecto del eje horizontal OX, se tiene

$$\int y^2\,d\omega = K^2\,\omega$$

Luego

$$(2)\qquad Q = m\,\omega\sqrt{2gH_c}\left\{1 - \frac{K^2\cos^2\alpha}{8H_c^2} + \dots\right\}$$

En todos los casos prácticos, la paréntesis puede reemplazarse simplemente por la unidad; en efecto, los orificios jeneralmente empleados son rectangulares i, a veces, circulares.

1.° En el caso de un orificio rectangular los lados del rectángulo son respectivamente horizontales i verticales; sea $2h$ la altura del orificio se tiene

$$K^2 = \frac{(2h^2)}{12} = \frac{h^2}{3}$$

Luego

$$\frac{K^2\cos^2\alpha}{8H_c^2} = \frac{\cos^2\alpha}{24}\left(\frac{h}{H_c}\right)^2$$

El valor máximo de este término es $\frac{1}{24}$, pero esto sucede cuando el borde superior del orificio está al nivel mismo del agua en el depósito; en jeneral $\frac{h}{H_c}$ será menor que $\frac{1}{2}$ de suerte que el término mismo será menor que $\frac{1}{100}$.

2.° En el caso de un orificio circular de radio R, se tiene

$$K^2 = \frac{R^2}{4}$$

Luego

$$\frac{K^2 \cos^2 \alpha}{8 H_c^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{32} \left(\frac{R}{H_c} \right)^2.$$

El valor máximo del término es por consiguiente $\frac{1}{32}$ i, en los casos prácticos, este valor puede ser considerado tambien como del órden de $\frac{1}{100}$.

En resúmen, la fórmula (2) puede siempre reducirse, en los casos prácticos, a

$$(3) \qquad Q = m\,\omega \sqrt{2g\, H_c}$$

H_c es la distancia del centro de gravedad del orificio al nivel superior del líquido en el depósito.

Compuertas

Las compuertas son orificios rectangulares a los cuales se puede aplicar la fórmula (3). Sean H la distancia del borde superior de la compuerta al nivel superior del líquido en el depósito a, la altura de la compuerta, i l su ancho, se tendrá

$$H_c = H + \frac{a}{2}$$

$$Q = m\,l\,a \sqrt{2g\left(H + \frac{a}{2}\right)}$$

La observacion muestra que el coeficiente m varía con H i A, entre los límites 0,60 i 0,70. Se han construido tablas que dan los valores de m en todos los casos prácticos; estas tablas, deducidas de la observacion directa permiten entónces determinar m cuando se conocen H i A. La distancia H se llama jeneralmente *carga encima del borde superior de la compuerta.*

Compuertas de fundo

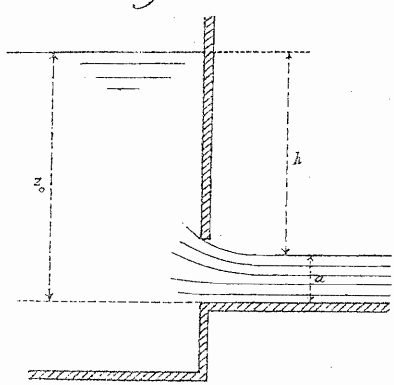
En las compuertas de fundo la contraccion de la vena líquida es suprimida abajo, se comprende entónces que el coeficiente m del gasto debe aumentar. El gasto se calcula siempre por medio de la fórmula (1) i el valor de m se deduce de Tablas especiales, deducidas ellas mismas de esperimentos directos.

A veces las compuertas de fundo son inclinadas, el valor de m de la fórmula (1) aumenta todavía porque la contraccion de la vena en la parte superior es mas pequeña en este caso. En la práctica se pueden adoptar, con suficiente aproximacion, los valores siguientes de m para las compuertas de fundo

	m.
Compuerta vertical..	0,70
Compuerta inclinada a 1 de base para 2 de altura.....	0,74
Compuerta inclinada a 1 de base para 1 de altura.....	0,80

Orificio seguido de un canal horizontal descubierto

Fig. 70



Se observa (fig. 70) que, a poca distancia del orificio de salida, el líquido está animado de un movimiento de traslacion recto i uniforme, de suerte que, en el canal descubierto, las presiones varían como en un líquido en reposo.

Apliquemos la fórmula de Bernouilli a dos moléculas líquidas situadas respectivamente en un punto del canal i en un punto del nivel superior del líquido en el depósito; sean z i z_0 las distancias de estos puntos a un plano horizontal confundido con el fondo del canal, tendremos

$$z + \frac{p}{\pi} + \frac{v^2}{2g} = z_0 + \frac{p_a}{\pi}$$

Sea a la altura del líquido en el canal, se tendrá

$$p = p_a + \pi(a - z)$$

Luego

$$z + \frac{p_a}{\pi} + a - z + \frac{v^2}{2g} = z_0 + \frac{p_a}{\pi}$$

O bien

$$\frac{v^2}{2g} = z_0 - a$$

Sea todavía h la diferencia de nivel del líquido en el depósito i en el canal, se tendrá simplemente

$$\frac{v^2}{2g} = h$$

O bien

$$v = \sqrt{2gh}$$

Sea ω el área del orificio i m el coeficiente de contraccion, el gasto Q será

$$Q = m\omega\sqrt{2gh}$$

Observaremos que, si el canal no existiera, el gasto seria igual a

$$m\omega\sqrt{2gh_c}$$

siendo h_c la distancia del centro de gravedad del orificio al nivel del líquido en el depósito; luego la agregacion del canal produce una disminucion del gasto.

Supongamos que se trata de una compuerta cuyo borde inferior queda fijo i cuyo borde superior puede subir o bajar; sea l el ancho de la compuerta, el gasto Q tendrá tambien la espresion siguiente:

$$Q = la\sqrt{2gh} = la\sqrt{2g(z_0 - a)}$$

Si el borde superior de la compuerta cambia de situacion, el valor de a cambia i z_0 queda constante; busquemos entónces cuál es el valor de a que da un gasto máximo; este valor deberá hacer máxima la espresion

$$a^2 (z_0 - a)$$

luego se debe tener

$$\frac{a}{2} = \frac{z_0 - a}{1} = \frac{z_0}{3}$$

O bien

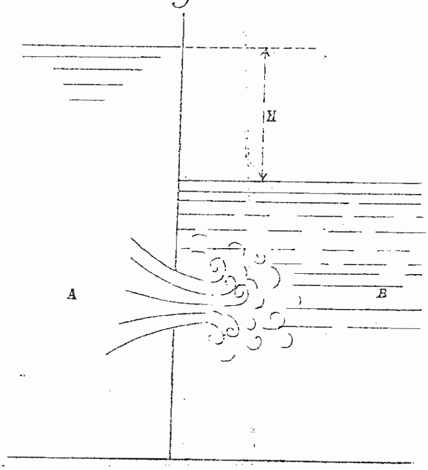
$$a = \frac{2}{3} z_0$$

MOVIMIENTO DEL AGUA ENTRE DOS DEPÓSITOS SEPARADOS POR UN ORIFICIO EN PARED DELGADA

Primer caso.—El orificio está enteramente sumerjido

Sean (fig. 71) A i B los dos depósitos, Ω el área del orificio; al pasar de A en B la vena líquida sufre una contraccion i el área de la seccion contraída es $m\Omega$; ademas la presion del líquido en cada punto de seccion contraída es la presion del liquido del depósito B situado en el punto considerado. Apliquemos el teorema de Bernouilli a dos moléculas situadas respectivamente en el nivel superior de A i en la seccion contraída, tendremos

Fig. 71



$$z + \frac{p}{\pi} + \frac{v^2}{2g} = z_0 + \frac{p_a}{\pi}$$

Sea H la diferencia de nivel del líquido en los dos depósitos, se tiene

$$\frac{p}{\pi}=\frac{p_a}{\pi}+(z_0-H)-z$$

Luego

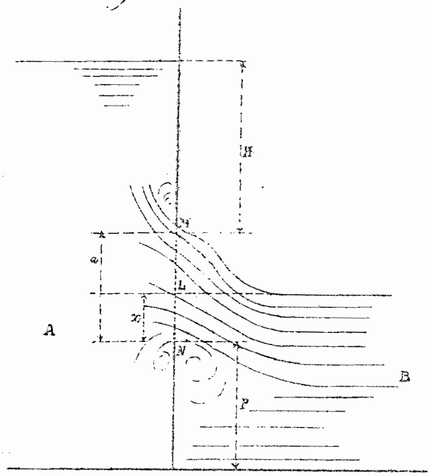
$$\frac{v^2}{2g}=H$$

El gasto Q es por consiguiente

$$Q=m\omega\sqrt{2gH}$$

Segundo caso.—Orificio parcialmente sumerjido

Fig. 72



Supongamos (fig. 72) un orificio rectangular, cuyo lados son respectivamente horizontales i verticales; sea l el ancho i $MN=a$ la altura; este orificio está colocado entre los depósitos A i B i el nivel prolongado del líquido en B divide el orificio en dos partes cuyas alturas son $NL = x$, $LM= a-x$.

Para avaluar el gasto, podemos considerar el orificio de altura $a-x$ como abierto en el aire i el orificio de altura x como completamente sumerjido; sean Q', Q'' los gastos correspondientes i H la altura del nivel superior en A sobre el borde superior del orificio, se tendrá

$$Q' = ml(a-x)\sqrt{2g\left(H+\frac{a-x}{2}\right)}$$

$$Q'' = mlx\sqrt{2g(H+a-x)}$$

Luego el gasto total Q será

$$Q = ml\sqrt{2g}\left\{(a-x)\sqrt{H+\frac{a-x}{2}}+x\sqrt{H+a-x}\right\}$$

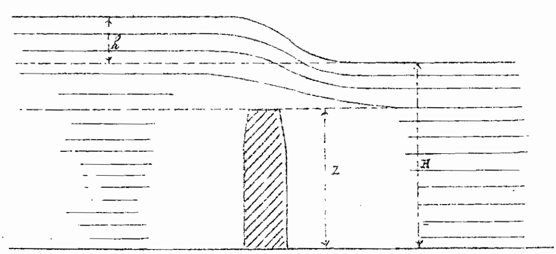
O bien, si se designa por Ω el área del orificio

$$(4)\quad Q = m\Omega\sqrt{2g}\left\{\frac{a-x}{a}\sqrt{H+\frac{a-x}{2}}+\frac{x}{a}\sqrt{H+a-x}\right\}$$

Represas

Una represa (fig. 73) puede ser considerada como la reunion

Fig. 73



de un vertedero ordinario i de un orificio completamente sumerjido.

Sea, respecto del fundo del canal, H la altura del agua en el tramo *aguas abajo*, z la altura de la presa i h la diferencia de nivel en los dos tramos; el gasto Q será la suma de dos gastos

Q_1 i Q_2; el primero Q_1 relativo a un vertedero de altura h, el segundo Q_2 relativo a un orificio completamente sumerjido, de altura $H-z$; la diferencia de nivel en los dos depósitos es h. Sean m_1 i m_2 los coeficientes de contraccion relativos a las dos clases de derrame i l el ancho del canal, se tendrá

$$Q_1 = m_1 \, l h \sqrt{2gh}$$

$$Q_2 = m_2 \, l (H-z) \sqrt{2gh}$$

Luego

$$Q = m_2 \, l \sqrt{2gh} \left(H - z + \frac{m_1}{m_2} h \right)$$

En la práctica se puede reemplazar m_2 por 0,6 i la razon $\frac{m_1}{m_2}$ por $\frac{2}{3}$; entónces

$$(5) \qquad Q = 2{,}7 \, l \left(H - z + \frac{2}{3} h \right) \sqrt{h}$$

Esta fórmula permite resolver dos problemas que se presentan con frecuencia en la práctica.

1.° *Se conoce la profundidad H i el gasto Q de una corriente de agua; determinar la altura z de una represa capaz de producir una caida h.*

En el tramo *aguas abajo*, el establecimiento de la represa no cambia el réjimen del agua, luego los datos H i Q se refieren a este tramo i la fórmula (5) da, para la altura buscada z de la presa,

$$z = H + \frac{2}{3} h - \frac{Q}{2{,}7 \, l \sqrt{h}}$$

En el segundo miembro todos los términos son conocidos.

2.° *Calcular la caida h, cuando se conoce la altura z de la represa i las cantidades H i Q.*

En este caso se debe resolver la ecuacion.

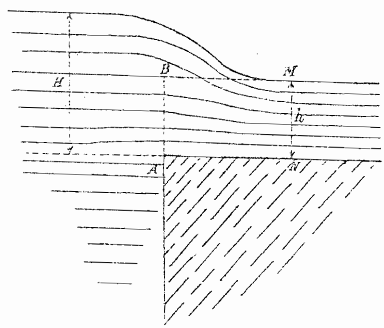
$$\left(H - z + \frac{2}{3} h \right) \sqrt{h} = \frac{Q}{2{,}7 \, l}$$

Es una ecuacion del tercer grado en h. Se resuelve por tanteo.

Vertedero con cresta gruesa

Cuando la cresta de un vertedero tiene cierta lonjitud, la napa líquida se mueve, sobre la cresta, de tal manera que las trayectorias de las moléculas líquidas sean sensiblemente paralelas; admitimos que las velocidades de todas las moléculas que atraviesan una seccion normal tal que MN (fig. 74) sean iguales, i sean entónces: v la velocidad comun de estas moléculas, h la altura de la napa líquida encima de la cresta, H la altura del nivel del agua del depósito encima del umbral (esta altura se mide en un punto, *aguas arriba*, suficientemente alejado del umbral). Si se admite que, en el interior del depósito, la velocidad de las moléculas líquidas es despreciable, el teorema de Bernouilli da simplemente

Fig. 74



$$H + \frac{p_a}{\pi} = h + \frac{p_a}{\pi} + \frac{v^2}{2g}$$

Luego

$$\frac{v^2}{2g} = H - h$$

Sea l el ancho del umbral i Q el gasto, se tendrá

$$Q = lh\sqrt{2g(H-h)} \qquad (6)$$

Trataremos de establecer una relacion entre h i H; para esto escribiremos de otra manera el valor del gasto Q.

El derrame en el plano vertical que pasa por la cresta puede ser considerado como la suma de dos gastos: uno relativo a un vertedero cuyo umbral está en B a una altura h encima de la cresta A, el otro relativo a un orificio completamente sumerjido de altura h situado entre dos depósitos cuya diferencia de nivel es $H-h$; se tiene por consiguiente

$$Q = m_1\, l\,(H-h)\sqrt{2g\,(H-h)} + m_2\, l h \sqrt{2g(H-h)}$$

O bien

$$Q = l\sqrt{2g\,(H-h)}\ \left\{ m_1\,(H-h) + m_2\, h \right\}$$

Igualemos los dos valores de Q i tendremos

$$h = m_1\,(H-h) + m_2\, h$$

O bien

$$h\,(1 + m_1 - m_2) = m_1\, H$$

Reemplacemos m_1 por 0,4 i m_2 por 0,6 i tendremos

$$2h = H$$

La espresion (6) del gasto Q da entónces

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l H \sqrt{2gH}$$

O sensiblemente

$$Q = 0{,}35\, l\, H \sqrt{2gH} \tag{7}$$

Los esperimentos directos averiguan efectivamente esta fórmula.

A. Obrecht

(Continuará)