CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

(Continuacion)

Ahora, para que OZ esté confundido con la normal, es necesario, segun (7), que se tenga, en O,

$$\frac{dz}{dx}=0, \frac{dz}{dy}=0$$

Todavía la orientacion de los ejes OX, OY, puede ser elejida de tal manera que la derivada $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ sea nula en el punto O.

Supongamos, en efécto, que se haga jirar los ejes OX, OY al rededor de OZ de un ángulo θ, las nuevas coordenadas x', y' de un punto serán relacionadas con las antiguas por medio de las fórmulas

$$x=x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$$

$$y=x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$$

i se tendrá

$$z=\phi(x, y)=\Psi(x' y')$$

$$\frac{dz}{dx'} = \frac{dz}{dx}\cos\theta + \frac{dz}{dy}\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{dz}{dy'} = -\frac{dz}{dx}\operatorname{sen}\theta + \frac{dz}{dy}\cos\theta$$

$$\frac{d^2 z}{dx'\,dy'} = -\frac{d\left(\frac{dz}{dx'}\right)}{dx}\operatorname{sen}\theta + \frac{d\left(\frac{dz}{dx'}\right)}{dy}\cos\theta$$

$$= \left(\frac{d^2 z}{dy^2} - \frac{d^2 z}{dx^2}\right)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{d^2 z}{dx\,dy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

Esta fórmula demuestra que hai siempre dos valores de θ, a ángulo recto uno del otro, para los cuales la derivada $\frac{d^2 z}{dx'\,dy'}$ es igual a cero.

Podemos, por consiguiente, admitir que la orientacion de los ejes OX, OY se haya elejido precisamente de tal manera que $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$ sea igual a cero en el punto O.

Se deduce ahora de las fórmulas (6)

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + (z-c)\frac{d^2 z}{dx^2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx\,dy} = \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} + (z-c)\frac{d^2 z}{dx\,dy}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dy^2} = 1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + (z-c)\frac{d^2 z}{dy^2}$$

En el punto O se tendrá, pues, simplemente

$$\frac{1}{2}\,\frac{d^2 f}{dx^2} = 1 - \rho\,\frac{d^2 z}{dx^2}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{d^2 f}{dx\,dy} = 0$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{d^2 f}{dy^2} = 1 - \rho\,\frac{d^2 z}{dy^2}$$

Podemos todavía poner

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{R_1}$$

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{1}{R_2}$$

Entónces la condicion (5) se reduce a

$$-\left(1 - \frac{\rho}{R_1}\right)\left(1 - \frac{\rho}{R_2}\right) < 0$$

O bien

(8) $$\left(1 - \frac{\rho}{R_1}\right)\left(1 - \frac{\rho}{R_2}\right) > 0$$

Hai dos casos que distinguir:

1.^{er} *caso* — R_1 *i* R_2 *tienen un mismo signo.*

La condicion (8) será satisfecha para todo valor de ρ que no esté comprendido entre R_1 i R_2. Supongamos, para fijar las ideas que R_1 i R_2 sean positivos i que $R_1 < R_2$, entónces los dos factores de (8) son positivos para todos los valores de ρ comprendidos entre $-\infty$ i R_1; la distancia ρ es entónces un mínimo; miéntras tanto los dos factores de (8) son negativos cuando ρ varía desde R_2 hasta $+\infty$, luego la distancia ρ es entónces un máximo.

Finalmente esta distancia no es ni máxima ni mínima cuando ella queda comprendida entre R_1 i R_2.

2.° *Caso*—R_1 i R_2 *tienen signos contrarios.*

La condicion (8) será satisfecha para todos los valores de ρ comprendido entre R_1 i R_2 i los dos factores de (8) son entónces positivos, luego ρ es un mínimo. Para los demas valores la distancia ρ no es ni máxima ni mínima.

Funciones de un número cualquiera de variables

Sea una funcion

$$F\,(u, v, w, \ldots\ldots)$$

Para que un sistema de valores de los variables haga máxima o mínima la funcion F es necesario que, para estos valores, se tenga

$$(9) \qquad \frac{dF}{du} = 0, \quad \frac{dF}{dv} = 0, \quad \frac{dF}{dw} = 0, \ldots\ldots$$

En efecto, podemos, en la funcion F, considerar todas las variables salvo una como constantes; entónces F es una funcion de una sola variable i para que haya máximo o mínimo su derivada, respecto de esta variable, debe ser nula. Como el mismo raciocinio se aplica a todas las variables sucesivamente, todas las derivadas parciales de la funcion, respecto de cada una de las variables, deberán ser cero.

Ahora, para que haya efectivamente máximo o mínimo, es necesario que el conjunto de los términos de segundo órden, en el desarrollo de la funcion F conserve un signo invariable, cualesquiera que sean los incrementos infinitamente pequeños de las variables.

Se puede observar que las condiciones (9) espresan tambien que *la diferencial total de la funcion F es igual a cero, cuando los valores de las variables corresponden a un máximo o un mínimo de esta funcion.* En efecto, esta diferencial total es la suma de los productos de las derivadas parciales por los incrementos arbitrarios de las variables i para que esta suma sea siempre nula, es necesario que todas las derivadas parciales sean nulas.

Máximo i mínimo relativos

Supongamos que se trate de determinar los máximos o mínimos de una funcion

$$F(x_1\ x_2 \ldots\ldots x_{m+n})$$

de $m+n$ variables entre las cuales existen n relaciones

$$(10) \qquad L_1=0, \quad L_2=0, \ldots \quad L_n=0$$

Si se dedujera de estas n relaciones los valores de n variables en funcion de las otras m i si se sustituyera estos valores en la funcion F, ésta se trasformaria en una funcion de m variables independientes i, segun lo que se ha establecido mas arriba, para que esta funcion sea máxima o mínima es necesario que su diferencial total sea nula.

Pero la diferencial total de la funcion F puede obtenerse ántes de sustituir en ella los valores de n variables deducidas de (10); en efecto se tiene

$$dF = \frac{dF}{dx_1}\,dx_1 + \frac{dF}{dx_2}\,dx_2 + \dots\dots + \frac{dF}{dx_{m+n}}\,dx_{m+n}$$

Ademas los $m+n$ incrementos dx_1, dx_2 .... dx_{m+n} deben satisfacer a las ecuaciones (10), luego se debe tener

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dL_1}{dx_1}\,dx_1 + \dfrac{dL_1}{dx_2}\,dx_2 + \dots\dots + \dfrac{dL_1}{dx_{m+n}}\,dx_{m+n} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{dL_n}{dx_1}\,dx_1 + \dfrac{dL_n}{dx_2}\,dx_2 + \dots\dots + \dfrac{dL_n}{dx_{m+n}}\,dx_{m+n} = 0 \end{array} \right.$$

De estas n ecuaciones (11) se puede deducir los valores de n incrementos en funcion de los m otros, sustituir en el valor de dF i obtener así la diferencial total con m incrementos arbitrarios.

Los coeficientes de estos m incrementos deben ser separadamente nulos, luego se obtendran m ecuaciones entre los $m+n$ variables; a éstas se deberán agregar las n relaciones (10) i se obtendrá finalmente un sistema de $m+n$ ecuaciones para determinar los valores de las $m+n$ variables.

Para hacer los cálculos, lo mas sencillo consiste en multiplicar las ecuaciones (11) por ciertos coeficientes indeterminados $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_n$ i sumarlas con la ecuacion.

$$(12) \qquad \frac{dF}{dx_1}\,dx_1 + \frac{dF}{dx_2}\,dx_2 + \ldots\ldots + \frac{dF}{dx_{m+n}}\,dx_{m+n} = 0$$

Se determinan, en seguida, los coeficientes $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_n$ de tal manera que los coeficientes de n incrementos sean nulos, en seguida se deberán igualar a cero los coeficientes de los m incrementos restantes; esto equivale a formar el sistema siguiente de $m+n$ ecuaciones

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dF}{dx_1} + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{dx_1} + \lambda_2 \dfrac{dL_2}{dx_2} + \ldots\ldots + \lambda_n \dfrac{dL_n}{dx_n} = 0 \\[2ex] \dfrac{dF}{dx_2} + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{dx_2} + \lambda_2 \dfrac{dL_2}{dx_2} + \ldots\ldots + \lambda_n \dfrac{dL_n}{dx_n} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{dF}{dx_{m+n}} + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{dx_{m+n}} + \lambda_2 \dfrac{dL_2}{dx_{m+n}} + \ldots\ldots + \lambda_n \dfrac{dL_n}{dx_{m+n}} = 0 \end{array} \right.$$

Estas $m+n$ ecuaciones con los n relaciones (10) forman así un sistema de $m+2n$ ecuaciones entre las $m+n$ variables i los n coeficientes $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_n$.

Observaremos que las ecuaciones (13) son las derivadas parciales, respecto de las $m+n$ variables, de la funcion

$$F + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots\ldots + \lambda_n L_n$$

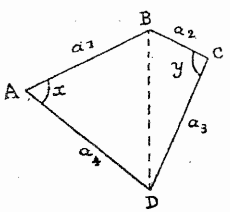
Cuando las n relaciones (10) se reducen a una sola ecuacion $L=0$, cada una de las ecuaciones (13) se reduce a sus dos primeros términos i la eliminacion de λ_1 da entónces

$$(14) \qquad \frac{\frac{dF}{dx_1}}{\frac{dL}{dx_1}} = \frac{\frac{dF}{dx_2}}{\frac{dL}{dx_2}} = \ldots\ldots = \frac{\frac{dF}{dx_{m+n}}}{\frac{dL}{dx_{m+n}}}$$

Estas relaciones son equivalentes a $m+n-1$ ecuaciones distintas entre los $m+n$ variables $x_1\ x_2 \ldots\ldots x_{m+n}$, luego si se agrega la ecuacion $L=0$ se pueden determinar los valores de las variables que hacen máxima o mínima la funcion F.

PROBLEMA I

Con cuatro rectas de lonjitudes dadas formar un cuadrilátero de área máxima



Sea $ABCD$ el cuadrilátero i a_1, a_2, a_3, a_4 sus cuatro lados conocidos, tracemos una diagonal BD i tomemos como incógnitas los ángulos x, y en A i C; el área S del cuadrilátero es dado por la fórmula

$$2\,S = a_1\, a_4 \text{ sen } x + a_2\, a_3 \text{ sen } y$$

Ahora se tiene

$$\overline{BD}^2 = a_1^2 + a_4^2 - 2\, a_1\, a_4 \cos x = a_2^2 + a_3^2 - 2\, a_2\, a_3 \cos y$$

Segun esto se puede escribir

$$2\ a_1\ a_4 \cos x - 2\ a_2\ a_3 \cos y + a_2^2 + a_3^2 - a_1^2 - a_4^2 = 0$$

Es el caso del máximo relativo de una funcion de dos variables x, y entre los cuales existe una relacion; la regla indicada mas arriba da entónces

$$\frac{a_1\ a_4 \cos x}{-2\ a_1\ a_4 \operatorname{sen} x} = \frac{a_2\ a_3 \cos y}{a_2\ a_3 \operatorname{sen} y}$$

O bien

$$-\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$$

O todavia

$$x + y = 180^\circ$$

Esto prueba que el cuadrilátero debe ser *inscriptible.*

La espresion del área máxima resulta entónces de la eliminacion de x entre las ecuaciones

$$2\ S = (a_1 a_4 + a_2 a_3) \operatorname{sen} x$$

$$2 (a_1 a_4 + a_2 a_3) \cos x = a_1^2 + a_4^2 - a_2^2 - a_3^2$$

Hagamos

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2\ p$$

Se obtiene sin dificultad

$$S=\sqrt{(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)(p-a_4)}$$

PROBLEMA II

Con n rectas de lonjitudes dadas, formar el polígono de área máxima

El polígono de área máxima debe ser inscriptible en una misma circunferencia; en efecto, si no lo fuera se podria siempre reemplazar un cuadrilátero cualquiera, formado de dos lados contiguos i dos diagonales por otro de área mayor, sin cambiar la lonjitud de los demas lados.

En otros términos, si el polígono no es inscriptible en una misma circunfereneia se puede siempre construir otro con los mismos lados i de área mayor; luego el polígono de área máxima es inscriptible en una misma circunferencia.

TERCERA PARTE

JEOMETRÍA INFINITESIMAL

CAPÍTULO PRIMERO

CURVATURA I TORSION DE LAS CURVAS

Se puede considerar una curva cualquiera como el límite hácia el cual tiende un polígono de un número infinito de lados infinitamente pequeños; ademas se puede suponer que todos los lados tienen una misma lonjitud ds.

La recta que une dos vértices consecutivos del polígono se confunde, en el límite, con la *tanjente* a la curva i el plano que pasa por tres vértices consecutivos tiene una posicion límite determinada; es el *plano osculador* a la curva.

Dos planos osculadores consecutivos contienen un mismo lado ds del polígono, luego su interseccion se confunde en el límite con la tanjente a la curva.

La *curvatura*, en un punto, es el límite hácia el cual tiende la razon entre el ángulo $\Delta\epsilon$ de dos elementos consecutivos i la lonjitud comun ds de ellos.

La *torsion*, en un punto, es el límite hácia el cual tiende la razon entre el ángulo $\Delta\phi$ de dos planos osculadores consecutivos i la lonjitud ds. En una curva plana la torcion es evidentemente nula.

Segun estas definiciones, la curvatura i la torsion tienen como dimension el *inverso de una lonjitud.*

En un polígono regular, inscrito en una circunferencia de radio R, la lonjitud ds i el ángulo $\Delta\epsilon$ satisfacen a la relacion

$$\frac{ds}{2} = R \sin \frac{\Delta\epsilon}{2}$$

Luego

$$\frac{\Delta\epsilon}{ds} = \frac{1}{R} \frac{\frac{\Delta\epsilon}{2}}{\sin \frac{\Delta\epsilon}{2}}$$

La primera ecuacion muestra que $\Delta\epsilon$ tiende hácia cero, cuando ds tiende hácia cero i la segunda da

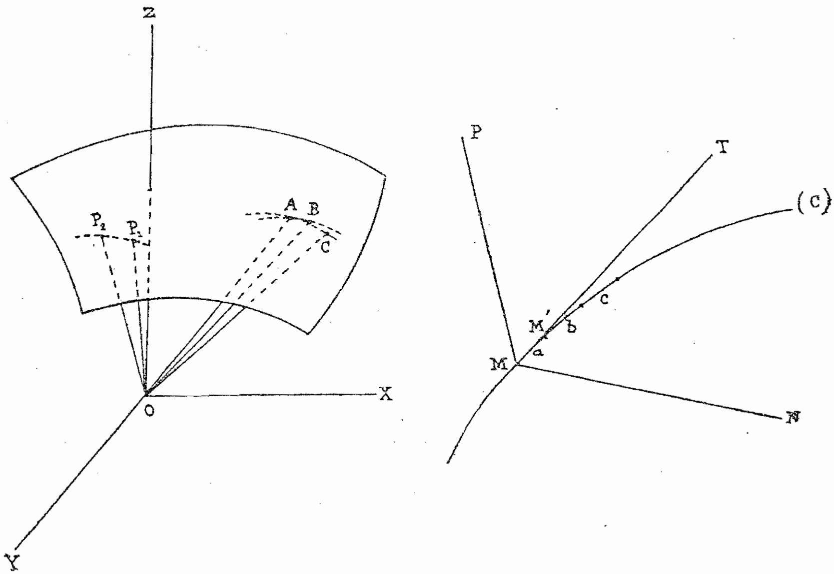
$$\lim \frac{\Delta\epsilon}{ds} = \frac{1}{R}$$

Luego, en una circunferencia, la curvatura es el inverso del radio; por analojía se llaman *radio de curvatura* i *radio de torsion* los inversos de la curvatura i de la torsion.

Indicatriz esférica

Tracemos, por un punto fijo O, (fig. 1) rectas paralelas a los lados consecutivos ds de una curva C i cortemos todas estas rectas por una esfera de centro O i de radio uno. Obtendremos, sobre la esfera, una sucesion de puntos infinitamente próximos. Unamos cada punto con el siguiente por medio de un arco de círculo máximo; en el límite, cuando ds tiende hácia cero, el polígono esférico así obtenido tomará la forma de una curva contínua; ésta se llama la *indicatriz esférica* de la curva (C).

Fig. 1



En la figura (1) se han considerado, desde un punto M, tres elementos consecutivos a, b, c de la curva (C) i se han representado los puntos correspondientes A, B, C de la indicatriz.

El lado AB mide, por construccion, el ángulo $\Delta\varepsilon$ de los elementos a, b; por otra parte, $A\,B$ está contenido en el plano $A\,O\,B$ i es perpendicular sobre $O\,A$.

En el límite, cuando ds tiende hácia cero, $O\,A$ es paralelo a la tanjente $M\,T$ i $A\,O\,B$ al plano osculador en M; luego, si se traza en M una normal $M\,N$ contenida en el plano osculador, la direccion límite de $A\,B$ es paralela a $M\,N$.

La recta $M\,N$ es la *normal principal*, en M, a la curva (C).

Los planos $A\,O\,B$, $B\,O\,C$ son respectivamente paralelos a los planos de los elementos a, b i b, c; sean P_1 i P_2 los polos de estos dos planos, el arco de círculo $P_1\,P_2$ medirá el ángulo $\Delta\,\phi$ de dos planos osculadores consecutivos de la curva (C). Ahora, el plano $P_1\,O\,P_2$ es perpendicular sobre $O\,B$, luego el arco $P_1\,P_2$ es perpendicular a $O\,P_1$ i a $O\,B$, o al plano $P_1\,O\,B$; su direccion límite es por consiguiente paralela a la direccion límite de $A\,B$, o paralela a $M\,N$.

Ademas la direccion límite de $O\,P_1$ es la normal $M\,P$ al plano osculador $N\,M\,T$; $M\,P$ se llama *binormal* de la curva (C) en el punto M.

Espresiones analíticas de los cosenos directores de la tanjente, de la normal principal i de la binormal

Sean x, y, z las coordenadas del punto M, respecto de un sistema de tres ejes rectangulares cuyo oríjen es el punto O (fig. 1). Podemos suponer que estas tres coordenadas están espresadas en funcion del arco s que separa el punto M de otro punto fijo i arbitrario de la curva (C). Las ecuaciones de esta curva tienen entónces la forma siguiente:

$$x=f_1\,(s)$$
$$y=f_2\,(s)$$
$$z=f_3\,(s)$$

Sean α, β, γ los cosenos directores de la tanjente $M\,T$; λ, μ, ν los de la normal principal $M\,N$ i ξ, η, ζ los de la binormal $M\,P$.

Para evitar toda ambigüedad en los signos de estos cosenos admitiremos que $M\,N$ i $M\,P$ están orientados respecto de $M\,T$ de la misma manera como $O\,Y$ i $O\,Z$ respecto de $O\,X$ i que el sentido de $M\,T$ es el de los arcos s crecientes.

Sean entónces $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ las coordenadas de un punto M' infinitamente próximo de M tendremos

$$\alpha = \lim \frac{\Delta x}{ds} = \frac{dx}{ds}$$

Las fórmulas son análogas respecto de los otros cosenos, luego se puede escribir

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{dx}{ds} \\ \beta &= \frac{dy}{ds} \\ \gamma &= \frac{dz}{ds} \end{aligned} \right.$$

Sean ahora a_1 i $a_1+\Delta a_1$ las abcisas de los puntos A i B de la indicatriz esférica i λ_1 el coseno del ángulo de $A\,B$ con $O\,X$, el arco $A\ B$ de la figura (1) mide el ángulo $\Delta\,\epsilon$ de los dos elementos a, b; luego

$$\Delta a_1 = \lambda_1 \ \Delta \epsilon$$

Dividamos los dos miembros de esta ecuacion por ds i pasemos al límite; el límite de $\frac{\Delta a_1}{ds}$ es $\frac{da}{ds}$ i, segun la figura (1), el límite de λ_1 es λ; luego

$$\frac{d\alpha}{ds} = \lambda \lim \frac{\Delta\epsilon}{ds}$$

Sea r el radio de curvatura de la curva en el punto M; el segundo factor es igual, por definicion a $\frac{1}{r}$, luego se puede escribir, respecto de los tres ejes

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\lambda}{r} &= \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2} \\ \frac{\mu}{r} &= \frac{d\beta}{ds} = \frac{d^2y}{ds^2} \\ \frac{\nu}{r} &= \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d^2z}{ds^2} \end{aligned} \right.$$

Para determinar finalmente los cosenos ξ, η, ζ observaremos que la direccion MP es perpendicular a MT i MN, luego se tendrá

$$\xi = \beta\nu - \gamma\mu = r\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)$$

$$\eta = \gamma\lambda - \alpha\nu = r\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)$$

$$\zeta = \alpha\mu - \beta\lambda = r\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)$$

A. OBRECHT

(Continuará)