NOTA
SOBRE NEPER Y LOS LOGARITMOS

POR

GENARO MORENO

NOTA SOBRE NEPER Y LOS LOGARITMOS

EL iniciador de los logaritmos es el escocés Juan Neper (o Napier) Barón de Merchiston, nacido en 1550 y muerto en 1617.

Ocurriósele a Neper coordinar dos progresiones, una aritmética y otra geométrica de modo que a cada término de la progresión geométrica correspondiese un solo término de la progresión aritmética (este último recibía el nombre de LOGARITMO del término correspondiente de la progresión geométrica.)

Las progresiones elegidas por Neper fueron

...... $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n},$ .... para la progresión aritmética, y

$$\ldots\ldots n,\ n\left(1-\frac{1}{n}\right),\ n\left(1-\frac{1}{n}\right)^2,\ n\left(1-\frac{1}{n}\right)^3,\ldots\ldots$$

para la progresión geométrica. Podemos observar que conocido un término de la progresión geométrica, se obtiene el siguiente, restándole al término conocido la n esima parte. El cálculo se reducía así a simples subtracciones. Prácticamente, substituyó n por 10^7, de modo que las progresiones utilizadas por Neper fueron

$$\ldots\ldots\ 0, \frac{1}{10^7}, \frac{2}{10^7}, \frac{3}{10^7}, \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ 10^7,\ 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right),\ 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2, \ldots\ldots$$

respectivamente.

Para formar la tabla de los logaritmos de los senos. Neper demostraba que log sen A está comprendido entre 1—sen A y cosec A—1. En consecuencia, para calcular log sen A tomaba las medias aritmética y geométrica entre 1—sen A y cosec A—1 asegurándose que diferían poco la una de la otra, y tomaba, en este caso la media geométrica para el valor de log sen A.

Hasta aquí, con pocas diferencias, un extracto del libro «Histoire des Sciences Mathématiques» de que es autor M. Marie; nosotros trataremos ahora de interpretar las líneas anteriores.

Habrá que establecer la coodinación, término a término, entre las progresiones: como n es un entero positivo muy grande, la progresión geométrica es decreciente, de modo que a menor número corresponde mayor logaritmo; además (como en todo sistema de logaritmos) al número 1 corresponde el cero como logaritmo, luego los números mayores que la unidad tienen logaritmos negativos y los menores que la unidad tienen logaritmos positivos.

La coordinación será entonces como sigue, según las columnas verticales:

$$\ldots a,\ a\left(1-\frac{1}{n}\right),\ a\left(1-\frac{1}{n}\right)^2, \ldots a\left(1-\frac{1}{n}\right)^k = 1, \ldots\ a\left(1-\frac{1}{n}\right)^{K+n} = \varepsilon,\ a\left(1-\frac{1}{n}\right)^{K+n+1}, \ldots$$

$$\ldots -\frac{k}{n},\ -\frac{k-1}{n},\ -\frac{k-2}{n}, \ldots \qquad 0 \qquad , \qquad n\cdot\frac{1}{n}=1, \qquad , \qquad \frac{n+1}{n}, \quad , \ldots$$

Hemos cambiado n por a (supuesto positivo) en el factor constante de los términos de la progresión geométrica para que el lector observe que esto no influye de ninguna manera en la obtención de la base del sistema, que hemos designados por ε.

Tenemos

$$\varepsilon = a\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k}{}^{n} = a\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Para que los términos de la progresión geométrica se diferencien muy poco, o mejor infinitamente poco, haremos $n=\infty$, luego

$$\varepsilon = \lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!},-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots = e^{-1}$$

$$= 0{,}367879\ldots$$

Para proceder prácticamente, Neper puso $a=n=10^7$, que origina las progresiones

$$\ldots 10^7,\ 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right), \ldots 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{k} = 1, \ldots 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{k+10^7}, \ldots$$

$$\ldots -\frac{k}{10^7},\ -\frac{k-1}{10^7},\ \ldots\ldots\quad 0\quad, \ldots\ldots\quad 10^7\cdot\frac{1}{10^7}, \ldots$$

con la base $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ que podemos substituír sin escrúpulo por $\varepsilon = e^{-1} = 0{,}367879$.

Fácil es ahora concebir la tabla: partiendo del valor $e^{-1} = 0{,}367879\ldots$ p. ej., y quitándole la 10^7 ava parte de sí mismo tenemos el término que le sucede en la progresión geométrica; su logaritmo es $\frac{10^7+1}{10^7}$ También se puede partir de $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{k} = 1$ y cero respectivamente, en las progresiones aritmética y geométrica.

Pasemos a las tablas de los logaritmos de los senos. Sea A un ángulo comprendido entre cero y 90°, Neper puso la siguiente tesis:

$$1-\text{sen } A < {}^{\varepsilon}\log \text{ sen } A < \frac{1-\text{sen } A}{\text{sen } A}$$

Llamando la atención al hecho de haber designado nosotros con $\varepsilon = e^{-1} = \lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = 0{,}367879\ldots.$

Formamos la curva $y = \log \text{sen } A - 1 + \text{sen } A$ y si la tesis es efectiva la curva tiene que ser positiva. Hagamos una breve tabla de valores:

A	0°	30°	45°	60°	90°
y	$+\infty$	?	?	?	0

Si la curva es totalmente positiva, su mínimo será cero; en caso contrario habrá mínimo negativo. Tenemos:

$$y' = \frac{\cos A}{\text{sen } A \cdot L\varepsilon} + \cos A = 0$$

$$\cos A = 0 \quad ; \quad A' = 90° \quad ; \quad y_1 = 0$$

$$\text{sen } A = -\frac{1}{L\varepsilon} = 1 \ : \ A'' = 90° \ ; \ y_2 = y_1 = 0$$

Formamos

$$y'' = \frac{1}{\text{sen}^2 A} - \text{sen } A$$

se obtiene:

$$y_1'' = y_2'' = 0 \quad (\text{hay duda}).$$

Continuamos con

$$y''' = -2 \text{ sen}^{-3} A \cos A - \cos A = 0$$

$$\cos A = 0 \qquad , \qquad A''' = 90°$$

$$2 + \text{sen}^3 A = 0 \qquad , \qquad \text{sen } A = \sqrt[3]{-2}$$

Este último valor se desecha, pues $|\sqrt[3]{-2}| > 1$. Para ver si $A''' = 90^\circ$ produce mínimo, formamos

$$y^{IV} = 6 \operatorname{sen}^{-4} A \cos A + 2 \operatorname{sen}^{-2} A + \operatorname{sen} A = 3 \text{ (mínimo).}$$

Un método análogo sigamos para la curva

$$y = \frac{1 - \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A} - {}^{\varepsilon}\log \operatorname{sen} A$$

A	0°	30°	45°	60°	90°
y	$\infty - \infty$	$0<k<1$	?	?	0

Estudiemos los valores extremos:

$$y' = \frac{-\cos A}{\operatorname{sen}^2 A} + \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A} = 0,$$

$$-\cos A + \cos A \operatorname{sen} A = 0,$$

$$\cos A = 0 \quad ; \quad A' = 90^\circ$$

$$\operatorname{sen} A = 1 \quad ; \quad A'' = 90^\circ$$

$$Y'' = \frac{1 + \cos^2 A - \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}^3 A} \quad ; \quad y''_{A'} = y''_{A''} = 0 \text{ (duda).}$$

Formando la tercera derivada y haciéndola igual a cero, obtenemos como única solución admisible en nuestro problema, otra vez $A' = 90^\circ$, valor que sustituído en la cuarta derivada la hace positiva, luego hay mínimo.

Nos queda por levantar la indeterminación:

$$y + 1 = \frac{1 - \operatorname{sen} A \, {}^{\varepsilon}\log \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A},$$

$$\lim_{A=0} \operatorname{sen} A \, {}^{\varepsilon}\log \operatorname{sen} A = \lim \frac{{}^{\varepsilon}\log \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}^{-1} A} = \frac{\cos A \operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen} A \cos A} = 0,$$

$$\lim_{A=0} \operatorname{sen} A = 0 \quad ; \quad \text{luego:} \quad \lim_{A=0} (y+1) = \infty$$

Como el mínimo de la curva es cero, esta es totalmente positiva.

Para poder utilizar la tesis debemos buscar la condición de que

$$\frac{1-\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A} - 1 + \operatorname{sen} A \leqq r$$

siendo r una cantidad positiva pequeña fijada de antemano; pues en estas condiciones habrá poco error al tomar para ${}^{\varepsilon}\log \operatorname{sen} A$ un valor comprendido entre $1-\operatorname{sen} A$ y $\operatorname{cosec} A-1$.

Como hemos dicho anteriormente Neper eligió para este valor intermedio, el medio geométrico entre dichas cantidades y aceptándolo únicamente si difería poco del medio aritmético. Nos preguntamos: hubo lógica en este procedimiento?

$$\text{Veamos: medio aritmético} = \frac{\cos^2 A}{2 \operatorname{sen} A}$$

$$\text{medio geométrico} = \frac{1-\operatorname{sen} A}{\sqrt{\operatorname{sen} A}}$$

Como sabemos el medio aritmético es en general mayor que el geométrico; en nuestro caso la excepción está en los 90° en que ambos valen 0; luego si probamos que

$$y = \frac{1-\operatorname{sen} A}{\sqrt{\operatorname{sen} A}} - {}^{\varepsilon}\log \operatorname{sen} A$$

es positivo entre 0^0, y 90^0, debe elegirse el medio geométrico

A	0°	30°	45°	60°	90°
y	∞	?	?	?	0

Averiguemos el signo de y' entre $0°$ y $90°$,

$$y' = \frac{-\cos A \,(\operatorname{sen} A + 1 - 2\sqrt{\operatorname{sen} A})}{2 \operatorname{sen}^{3/2} A}$$

Basta con averiguar el signo de $\operatorname{sen} A + 1 - 2\sqrt{\operatorname{sen} A}$

Pongamos

$$\operatorname{sen} A - 2\sqrt{\operatorname{sen} A} + 1 = k$$

$$\operatorname{sen} A - 2\sqrt{\operatorname{sen} A} + (1-k) = 0$$

$$\sqrt{\operatorname{sen} A} = 1 \pm \sqrt{1 - 1 + k} = 1 \pm \sqrt{k}$$

$$\operatorname{sen} A = 1 + k \pm 2\sqrt{k}$$

Como $\operatorname{sen} A$ es real, k tiene que ser mayor que cero, o sea $y' < 0$. La primera derivada es negativa la función decrece al crecer A de $0°$ a $90°$. Hay, pues, conveniencia en la elección del medio geométrico; pero: por qué debe diferir poco del medio aritmético? Tenemos:

$$\underbrace{1 - \operatorname{sen} A}_{x_1} < {}^{\varepsilon}\log \operatorname{sen} A < \underbrace{\frac{1}{\operatorname{sen} A} - 1}_{x_2}$$

$$x_1 + x_2 = c \quad , \quad \text{luego } x_1 = \frac{c}{2} - h \quad , \quad x_2 = \frac{c}{2} + h$$

el medio aritmético $= \dfrac{c}{2}$ y el geométrico $= \sqrt{\dfrac{c^2}{4} - h^2}$

se diferencian poco si h es pequeño, lo que trae como consecuencia que también se diferencien poco x_1 y x_2, y así podremos aceptar el valor intermediario

$$\sqrt{\frac{c^2}{4} - h^2}$$

como log sen A.

Averiguemos también a partir de qué valor de A se comete un error igual o mayor que r (r es positivo pequeño). Se tiene

$$\frac{1-\operatorname{sen} A}{\sqrt{\operatorname{sen} A}} - {}^{\varepsilon}\log \operatorname{sen} A = r$$

o si se quiere

$$\frac{1-\operatorname{sen} A}{\sqrt{\operatorname{sen} A}} + \mathrm{L} \operatorname{sen} A - r = 0.$$

Poniendo $\sqrt{\operatorname{sen} A} = \operatorname{sen} B$ se obtiene la ecuación

$$1 - \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen} B \ (2 \, \mathrm{L} \operatorname{sen} B - r) = 0$$

haciendo las substituciones

$$\mathrm{L} \operatorname{sen} B = q \ , \ \operatorname{sen} B = e^q \ , \ \operatorname{sen} B = \cos h\, q + \operatorname{sen} h\, q \ ,$$

queda

$$1 - e^{2q} + e^q \ [2\, q - r] = 0 \ ;$$

$$2\, q - r = \frac{e^{2q} - 1}{e^q} = e^q - e^{-q} \ ,$$

pero

$$e^{-q} = \cos h\, q - \operatorname{sen} h\, q \ ,$$

luego:

$$2\, q - r = 2 \operatorname{sen} h\, q$$

o bien,

$$r = 2 \ (q - \operatorname{sen} h\, q)$$

Como $\operatorname{sen} B = e^q$, q tiene que ser negativo, por ejemplo, $q = -0{,}0900$, lo que dá

$$\operatorname{sen} h \ (-0{,}09) = -\operatorname{sen} h \ 0{,}09 = -0{,}0901$$

entonces $r = 2 \ (-0{,}0900 + 0{,}0901) = 0{,}0002$.

Para el cálculo de A:

$$\operatorname{sen} A = e^{2q} = e^{-0,18}$$

$$\log \operatorname{sen} A = -0,18.0,4343 = -0,078174 = 9,92183-10,$$

$$A = 56^\circ\ 38'\ 40''.$$

En los 56° 38′ 40″ el error es de 0,0002 y para ángulos menores va aumentando.