HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

POR

CÁRLOS WARGNY

(*Continuacion*)

CAPÍTULO III

LAS ESCUELAS DE ATÉNAS I CNIDO

(—420 a—300)

A fines del siglo V, ántes de J. C., Aténas llegó a ser el centro principal de los estudios matemáticos: su comercio, los tributos de sus aliados i el jenio de sus hombres políticos la llevaron a ocupar un puesto sobresaliente en la península helénica; i el cultivo de la filosofía i de las ciencias, en sus diversos ramos, la colocaron en primer lugar.

Anaxágoras (—500,—428) nació en Clazomena; i, a una edad avanzada, establecióse en Aténas, donde difundió la ciencia de la escuela jónica.

Habiendo sostenido que el sol era mas grande que el Peloponeso, fué condenado por impiedad i se le encerró. Cuéntase que en su prision escribió un tratado sobre la cuadratura del círculo.

Anaxágoras fué uno de los filósofos mas renombrados de su tiempo; con los sofistas, que cultivaban preferentemente la elocuencia, preparó el camino para las ciencias exactas, que debian venir mas tarde.

Entre los sofistas que se dedicaban a estas ciencias hai que mencionar al astrónomo *Meton*, que dió el nombre al ciclo astronómico o número áureo (19), en que coinciden las lunaciones.

Hippias i Antifon hicieron un estudio especial de la Jeometría.

Hippias de Elea (420), aritmético distinguido, inventó la *cuadratriz*, curva que resuelve la triseccion o multiseccion del ángulo.

La cuadratriz se concibe así: El radio horizontal $O\ A$ jira uniformemente al rededor del centro O i describe un círculo; una recta igual a $O\ A$ se mueve uniforme i paralelamente a dicho radio i describe el cuadrado $O\ A\ C\ B$: Las interseccciones sucesivas de estas dos rectas determinan el lugar llamado cuadratriz.

Su ecuacion, en coordenadas polares, se construye sin dificultad; porque, sean O el polo, $O\ A$ el eje polar, $O\ P = r$ el radio vector del punto P de la curva, θ el ángulo vectorial que forma r con $O\ A$ i $O\ A = a$, tendremos: los ángulos θ i $^1/_2\ \pi$ son proporcionales a las ordenadas $P\ Q$ i $B\ O$; o bien:

$$\frac{\theta}{^1/_2\ \pi} = \frac{\text{r sen}\ \theta}{\text{a}} \therefore\ \pi\ \text{r} = 2\ \text{a}\ \theta \text{ cosec } \theta$$

En coordenadas cartesianas, siendo O el orijen, $O\ A$ el eje de las x, $O\ B$ el de las y:

$$\text{tg}\ \theta = \frac{\text{y}}{\text{x}} = \therefore \text{y} = \text{x tg}\ \theta;$$

i como la relacion anterior se escribe:

$$\frac{\theta}{^1/_2\ \pi} = \frac{\text{y}}{\text{a}} \therefore \theta = \frac{\pi\ \text{y}}{2\ \text{a}}, \text{ i tg } \theta = \text{tg}\ \frac{\pi\ \text{y}}{2\ \text{a}}$$

luego, la ecuacion es;

$$\text{y} = \text{x tg} \frac{\pi\ \text{y}}{2\ \text{a}} \quad \text{o} \quad \text{x} = \text{y cot} \frac{\pi\ \text{y}}{2\ \text{a}}$$

Si se quiere dividir el ángulo $A\ O\ P = \theta$ en tres partes iguales, bastará dividir de este modo la ordenada $O\ M$, i por el punto inferior de division trazar una horizontal, que determinará en la curva un punto P' que pertenece a la trisectriz.

En efecto, las coordenadas de P' son

$$\tfrac{1}{3}\ y \cot \tfrac{1}{3}\ \theta,\ \tfrac{1}{3}\ y,$$

valores que satisfacen la 2.ª ecuacion.

Por otra parte, si se desea que el ángulo θ sea igual a los $^2/_3$ de 90°, por ejemplo, tendremos en la 1.ª ecuacion

$$r = \frac{4}{9}\sqrt{3},$$

i el valor

$$y = r \text{ sen } 60^\circ = \tfrac{1}{2}\ r\ \sqrt{3}$$

se reduce a $^2/_3\ a$, como debe ser.

Hippias imajinó un instrumento para trazar la curva; mas, como Platon criticara el uso de otros instrumentos diferentes de la regla i el compas, en el estudio de la jeometría, su uso fué desterrado del dominio de la ciencia.

Antifon (hácia—420) trató de determinar el área del círculo, considerándolo como el límite del área de un polígono inscrito, cuyo número de lados aumenta indefinidamente. Principiaba por inscribir un triángulo equilátero o un cuadrado, i en los segmentos circulares construia triángulos isósceles. Este método es el mismo que empleó Brison de Heraclea, como ya lo vimos.

Anaxágoras, Hippias i Antifon deben ser considerados como los principales precursores de los que crearon las dos escuelas de Aténas i Cnido, que brillaron simultáneamente hasta la fundacion de la escuela de Alejandría. Hipócrates fué el fundador de la escuela de Aténas; Platon i Teetetes pertenecieron a ella; se cree que Eudoxio fundó la escuela de Cnido, i que Menecmo i Aristeo fueron sus discípulos. Debemos advertir que las relaciones de estas dos escuelas son tan estrechas, que es imposible separar su historia.

Las escuelas de Aténas i Cnido estudian especialmente los tres problemas mas célebres de la antigüedad: la duplicacion del cubo, la triseccion del ángulo i la cuadratura del círculo. Los dos primeros problemas, considerados analíticamente, exijen la resolucion de las ecuaciones de tercer grado; pero como los griegos, para este objeto, no usaban mas que la regla i el compas, es decir, la recta

$$Ax + By + C = 0$$

i el círculo

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

lugares que sólo resuelven las dos raices de una ecuacion de segundo grado, desde que pueden cortarse en dos puntos, no podian resolver los problemas de tercer grado, valiéndose de la jeometría euclidiana sola.

Resuelve la Jeometría Analítica estos dos problemas, empleando las secciones cónicas.

En cuanto al tercer problema o sea construir un cuadrado equivalente en área a un círculo, o, si se quiere, formar un rectángulo cuyos lados sean el radio r i la semicircunferencia πr, desde largo tiempo se sabia que estas dos líneas eran inconmensurables entre sí.

Ultimamente, Lindemann demostró que su razon no puede ser raiz de una ecuacion aljebraica racional: luego, la jeometría euclidiana tampoco puede dar las medios para resolver un problema de tal naturaleza. Se comprende ahora por qué los atenienses i cnidianos escollaron en sus tentativas, aunque éstas los condujeron al descubrimiento de muchos teoremas i de nuevos métodos.

Ademas de estos trabajos, los discípulos de Platon reunieron las diferentes proposiciones de los libros I a IX i XI i XII de los *Elementos* de Euclides, i algunos teoremas elementales de las secciones cónicas.

Hipócrates (- 470, ...) nació en Quios; principió por ser comerciante; i como fuera despojado de sus bienes, para ganarse la vida abrió en Aténas una escuela de jeometría.

Hipócrates de Quios, que no hai que confundirlo con el médico célebre Hipócrates de Cos, su contemporáneo, fué uno de los mas grandes matemáticos griegos. Compuso el primer tratado de Jeometría Elemental, que sirvió probablemente a Euclides de modelo. Fué el primero que designó los vértices de una figura por letras; se supone que los pitagóricos tambien lo hicieron así; los jeómetras hindúes jamas emplearon las letras con tal objeto. Hipócrates dábale al cuadrado el nombre de *dynamis* o potencia, que hoi tiene; sin embargo, los pitagóricos decian: «la potencia total de los catetos es la misma que la de la hipotenusa» (Euc. I, 47).

Para resolver un problema, empleaba el método de *reduccion*, que consistia en reducirlo a otro mas sencillo. El método de desmostracion por «la reduccion al absurdo», puede considerarse como un caso particular del anterior.

Creó la jeometría del círculo: descubrió que segmentos iguales son capaces de ángulos iguales; que el ángulo subtendido por una cuerda es agudo, recto u obtuso segun el segmento en que está incrito sea menor, igual o mayor que una semicircunferencia (III, 31).

Atribúyense a Hipócrates las dos proporciones siguientes.

Los círculos son proporcionales a los cuadrados de sus diámetros (XII, 2): los segmentos semejantes son proporcionales a los cuadrados de sus cuerdas.

Estudió la cuadratura del círculo i la duplicacion del círculo; i, gracias a su influencia, estos dos problemas ocuparon lugar preponderante en la escuela ateniense.

La cuadratura la abordaba así:

a). Sobre el diámetro $BC = a$ de un semicírculo inscribia un triángulo rectángulo isósceles ABC, i sobre los catetos $(b = c)$ como diámetros describia dos semicírculos. El teorema de Pitágoras, daba:

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ o } \tfrac{1}{2}\pi a^2 = \tfrac{1}{2}\pi b^2 + \tfrac{1}{2}\pi c^2;$$

pero $\frac{1}{2}\pi a^2$ compónese del triángulo $\frac{1}{2}bc$ i de dos segmentos E i G:

$$\tfrac{1}{2}\pi a^2 = \tfrac{1}{2}bc + E + G; \qquad (1)$$

i los semicírculos de los catetos están formados de E i G i de las *lúnulas* L i L':

$$\frac{1}{2}\pi a^2 = L + L' + E + G. \qquad (2)$$

La diferencia de (1) i (2) nos dice que

$$\frac{1}{2} b c = L + L',$$

esto es, las lúnulas son equivalentes al triángulo. Ademas, siendo $b = c$ i $L = L'$: $L = \frac{1}{2} a^2$.

De estas relaciones, es evidente que no podemos sacar el valor de π, desde que las relaciones anteriores conducen a la identidad

$$\frac{1}{2} b c = \frac{1}{2} b c$$

b). Inscribia un semiexágono regular en una semicircunferencia de radio a; entónces el cuadrado construido sobre el diámetro es igual a la suma de los cuadrados de los tres lados b, c, d, del exágono i el radio a:

$$4 a^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2;$$

lo que es evidente, porque $a = b = c = d = a$; luego,

$$^2 \pi a^2 = \frac{1}{2} \pi (a^2 + b^2 + c^2 + d^2);$$

es decir, el semicírculo de diámetro 2 a es igual a la suma de los 4 semicírculos de diámetros a, b, c i d. Restamos la parte comun:

$$\text{Trapecio } \frac{3a}{2} h = 3 \text{ lúnulas} + \frac{1}{2} \pi a^2.$$

Segun Simplicio, Hipócrates creia que una de estas lúnulas era igual a la anterior de cuerda a $\sqrt{2}$; error inadmisible en un jeómetra como Hipócrates.

Estas relaciones i otras que enunció el matemático griego, son las mas antiguas que se conocen sobre áreas limitadas por líneas curvas.

Hipócrates se ocupó tambien en el problema de la duplicacion del cubo.

Cuenta Filopono que en 430 la peste asoló a los atenienses; i que, consultado el oráculo de Delfos, Apolo contestó que para detener el flajelo se debia duplicar el altar del templo, altar que tenia la forma de un cubo. Los atenienses duplicaron la arista del cubo, segun unos; segun otros, colocaron un segundo altar al lado del primero. Como la epidemia no disminuyera, consultaron de nuevo el oráculo, i esta vez esplicó que el altar pedido debia tener un volúmen doble. Los desolados habitantes acudieron entónces a Platon, quien los dirijió a los jeómetras.

Ninguna de las tradiciones que al respecto se conservan es verosímil.

Hipócrates reducia el problema a la determinacion de dos medias proporcionales entre la recta a i su duplo $2a$:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{x} = \frac{y}{2a}$$

La primera nos da

$$x^2 = a\,y$$

la segunda,

$$y^2 = 2\,a\,x;$$

de las cuales deducimos:

$$x^2 = a\sqrt{2\,a\,x} \quad \text{o bien} \quad x^3 = 2\,a^3.$$

Esta construccion, que no pudo hacer Hipócrates, se da en los testos modernos de Jeometría Analítica.

Platon (—429 a —348), el ilustre fundador de la Academia i el mas brillante de los escritores de la antigüedad, nació en Aténas i durante ocho años fué discípulo de Sócrates, cuyas doctrinas dió a conocer en sus diálogos inmortales. Despues de la muerte de su maestro, Platon, poseedor de una cuantiosa fortuna, empleó varios años en viajar, i se entregó al estudio de las Matemáticas. Visitó el Ejipto con Eudocio i Estrabon. Estudió en Cirena con Teodoro i en Estobia con Arquitas, Euritas, Tetaponto i Timeo de Locres. De vuelta a Aténas, fundó en 380 la Academia, escuela que en su frontispicio tenia escrita esta divisa: «Nadie entra aquí si no es jeómetra».

En Platon dominaban las ideas de Pitágoras sobre el conocimiento humano, i creia que el estudio de la jeometría debia preceder al de la filosofía. La influencia de Platon fué estraordinaria en el campo de la ciencia i su opinion prevaleció casi siempre. Objetó el uso de todo instrumento jeométrico que no fuera la regla o el compas; a él se debe el que se comience la esposicion de una teoría por las definiciones, los postulados i axiomas escrupulosamente coordinados; clasificó sistemáticamente los métodos empleados en la jeometría; i llamó la atencion sobre la importancia del análisis.

En el método analítico se supone resuelto el problema o demostrado el teorema, i de esta hipótesis se llega a una conclusion cierta o falsa: si lo segundo, la cuestion propuesta es tambien falsa; i si lo primero, se vuelve sintéticamente de la deduccion a la hipótesis.

Se atribuye a Platon el siguiente teorema: en dos triángulos rectángulos que tienen un cateto comun *A B*, los otros catetos *B C*, *A D* paralelos i cuyas hipotenusas *B D*, *A C* se cortan perpendicularmente en *P*, se verifican las relaciones

$$\frac{PC}{PB} = \frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PD},$$

deducidas de las alturas B P, A P que son medias proporcionales entre los segmentos *A P*, *P C*; *B P*, *P D*.

Si hacemos $P\,D = 2\,P\,C$, se obtiene:

$$\overline{P\,P}^{\,3} = 2\,\overline{P\,C}^{\,3},$$

fórmula de la duplicacion del cubo.

Eudoxio (—408 á —355) nació en Cnido, fué discípulo de Arquitas, viajó por Ejipto con Platon i fundó en Cysico una escuela de este nombre; durante algun tiempo ejerció la medicina en Aténas i se ocupó en los negocios públicos. Sus obras matemáticas parecen notables: descubrió casi todas las proposiciones del libro V de Euclídes, i sus demostraciones son parecidas. Dió a conocer algunas proposiciones relacionadas con la *seccion áurea*, problema conocido de los pitagóricos i resuelto por Euclídes (II, 11).

H

A ———————— B

Fig. 1.

La seccion áurea consiste en dividir la recta $A\,B = a$, en en dos partes $A\,H = x$ i $H\,B = a - x$; de modo que resulte la proporcion llamada de razon media i estrema:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$

que conduce a la ecuacion cuadrada

$$x^2 + a\,x - a^2 = 0$$

cuya solucion es

$$x = \frac{1}{2}\,a\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$$

Las proposiciones de Eudoxio se traducen en las igualdades siguientes, que referimos a los *Elementos* de Euclídes:

I. $\left(\frac{1}{2}a+x\right)^2 = 5\left(\frac{1}{2}a\right)^2$ (XIII, 1)

II. Recíproca de I (XIII, 2)

III. $\left[(a-x)+\frac{1}{2}x\right]^2 = 5\left(\frac{1}{2}x\right)^2$ (XIII, 3)

IV. $a^2+(a-x)^2 = 3x^2$ (XIII, 4)

V. $\frac{a+x}{a} = \frac{a}{x}$ (XIII, 5)

La seccion áurea se presenta en la inscripcion del decágono regular en el círculo: a es el radio i x el lado.

Eudoxio creó el método de exhaucion, fundado sobre la proposicion siguiente: si a la mayor de dos magnitudes se le quita mas de su mitad i a la resta mas de su mitad i así sucesivamente, se obtendrá al fin una resta menor que la menor de las dos magnitudes (Euc. X, 1, o XII). Con este método los jeómetras griegos evitaban el uso de las infinitesimales. Euclídes (XII, 2) emplea este método pora demostrar que los círculos son proporcionales a los cuadrados de sus radios, i lo completa con la reduccion al absurdo. El mismo método sirvió a Eudoxio para establecer que la pirámide es el tercio del prisma de base i altura iguales (XII, 7,10), i que dos esferas son entre sí como los cubos de sus radios. Algunos creen que el teorema (XII, 2) de Euclídes es de Eudoxio i no de Hipócrates.

Eudoxio estudió otras curvas ademas del círculo. Para esplicar los fenómenos celestes, imajinó un sistema de 27 esferas movibles, a las que estaban fijas el sol, la luna, los planetas i las estrellas. La obra de Astronomía de Arato se funda en este sistema.

Menecmo (—375 a—325), discípulo i sucesor de Eudoxio, adquirió una gran reputacion como profesor de jeometría i llegó a ser uno de los maestros de Alejandro el Grande. Fué el primero que estudió las secciones crónicas, llamadas durante largo tiempo la *triada menecmiana.*

Considerábalas como las secciones de un plano fijo que cortaban diferentes conos: Demostró que un cono recto cortado por un plano perpendicar a la jeneratriz dá una elipse *cuando* el ángulo del vértice es agudo, una parábola si es recto i una hipérbola si es obtuso. Dió ademas una construccion mecánica de estas curvas. Demostró de dos maneras cómo se podia resolver con estas curvas el problema deliaco: Para esplicar el primer método nos valdremos del análisis moderno: Las dos parábolas

$$y^2 = 2\,ax, \qquad x^2 = ay,$$

cuyos parámetros son dobles uno de otro, se cortan en un punto de coordenadas

$$x = a\sqrt[3]{2}, \qquad y = a\sqrt[3]{4},$$

i la abscisa verifica la relacion

$$x^3 = 2\,a^3.$$

Es probable que esta solucion le fué sujerida por el método de Eudoxio, que ya vimos mas arriba:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2\,a},$$

de donde salen las dos parábolas.

La segunda solucion se encuentra en la interseccion de la parábola e hipérbola.

$$x^2 = a\,y, \qquad x\,y = 2\,a^2,$$

que se cortan en el punto

$$x^3 = 2\,a^3\,, \qquad y^3 = 4\,a^3$$

Aristeo escribió sobre los cincos poliedros regulares.

Tecetetes desarrolló la teoría de las magnitudes inconmensurables. El siguiento teorema (Eux. X. 9) le pertenece: los cuadrados de dos rectas comensurables son entre sí como el cuadrado de un número es al cuadrado de otro número, i recíprocamente; los cuadrados contenidos sobre dos rectas inconmensurables están entre sí en una razon que no puede ser espresada por el cuadrado de un número al cuadrado de otro número, i recíprocamente.

Aristóteles.(—384 a—322) nació en Estajira, i aunque se dedicó de preferencia a la filosofía i a las ciencias naturales llegando a ocupar el puesto del filósofo mas renombrado de todos los tiempos, no descuidó, sin embargo, las matemáticas ni la mecánica. En una pequeña obra que se le atribuye se ve que, en su tiempo, ya los principios de la ciencia del movimiento llamaban la atencion; este libro, ademas, es el primer ejemplo conocido del empleo de las letras para demosnar las magnitudes. Ahí encontramos una prueba dinámica del paralelógramo de las fuerzas; i el siguiente pasaje notable: «si α es una fuerza aplicada a una maza β, i su desplazamiento i δ el tiempo trascurrido, se puede decir que α desplazará una maza $^1/_2\beta$ a la distancia $2\,\gamma$ i en el tiempo δ, o a la distancia γ i en el tiempo $^1/_2\ \delta$.» Empero, la conclusion a que llega mas adelante es indiscutible.

Aristóteles observa que «lo que se gana en potencia se pierde en el camino recorrido» i que «dos pesos que se equilibran en una palanca, son inversamente proporcianales a sus brazos.» A pesar de todo, no se esplica por que un móvil se detiene siempre, ni por qué un vehículo de ruedas grandes se mueve mas fácilmente que otro de ruedas pequeñas. Agregaremos aun que la pequeña obra citada contiene graves errores.

En resúmen, los griegos no comprendieron que los principios de la mecánica reposan sobre la observacion i la esperimentacion.

CAPITULO IV

LA PRIMERA ESCUELA DE ALEJANDRÍA

(—300 a —30)

En Alejandría fué donde se creó por primera vez un centro intelectual análogo a nuestras universidades. Su admirable situacion, sus salas de lectura, sus bibliotecas i sus laboratorios de todo jénero, hicieron que fuera la metrópoli intelectual del pueblo heleno, conservando su particular importancia durante diez siglos.

Produjo los tres mas grandes matemáticos de la antigüedad; Euclides, Arquímedes i Apolonio, quienes trazaron un camino seguro que fué seguido por sus sucesores, pues supieron libertarse de toda secta filosófica.

En —332, fundó Alejandro el Grande la ciudad de Alejandría, cerca de la desembocadura del Nilo, en Ejipto, i confió su embellecimiento á Dinócrates, arquitecto del templo de Diana, en Éfeso.

A su muerte, en—323, su imperio fué dividido, i el Ejipto quedó bajo el cetro de Tolomeo, quien escojió a Alejandría para capital de su reino, i dió comienzo a la construccion de edificios universitarios contiguos a su palacio. 300 años, A. J., la Universidad abrió sus puertas al público, dotada de los sabios mas eminentes que Tolomeo habia hecho venir de Grecia. La biblioteca fué confiada al ateniense Demetrio

Falero: cuarenta años mas tarde contaba con 600,000 manuscritos.

La enseñanza matemática estaba dirijida por Euclides, considerado, por esto, como el primero entre los matemáticos universitarios.

Varias de las obras que produjo esta escuela han llegado hasta nosotros; i conocemos sus trabajos mas importantes por el tratado de Pappo, que los enumera i crítica. Sin embargo, la vida de sus autores nos es casi del todo ignorada.

III SIGLO A. J. C.

Euclides (– 330? a —275?) era griego i conocia la jeometría de Platon.

Impúsose de tal modo en la Universidad de Alejandría que su nombre servia para designar sus propias obras; i aun se llegó a confundirlo con la Jeometría misma.

La reputacion de Euclides descansa sobre sus *Elementos*, que es una esposicion sistemática de las principales proposiciones de la Jeometría Elemental (es decir, las relativas a la recta i al círculo) i de la Teoria de los Números. Esta obra fué adoptada por los griegos como el testo clásico modelo de las Matemáticas Elementales.

El testo moderno lo estableció Teón, padre de Hipatia, 300 años despues de J. C. Consérvanse otros manuscritos i estractos de la obra, i de su comparacion se desprende que han sido alteradas las definiciones, axiomas i postulados, mas no así las proposiciones.

La parte jeométrica es una compilacion de obras anteriores. Probablemente los libros I i II son debidos a los pitagóricos, el III a Hipócrates, el V a Eudoxio, i los libros IV, VI, XI i XII a los mismos pitagóricos i a los atenienses.

Sin embargo, todos estos conocimientos de sus antecesores fueron retocados por Euclides, omitiendo corolarios sencillos o conocimientos tales como el del ortocentro, i dando demostraciones nuevas.

La parte Aritmética (VII, VIII, IX) parece ser de Eudoxio i Pitágoras i el libro X, de Teetetes, aunque Proclo asevera que Euclides completó esos conocimientos.

El libro I de los Elementos consta de 36 definiciones, 6 postulados, 9 axiomas i 48 proposiciones: 34 teoremas i 14 problemas. Las 48 proposiciones pueden dividirse en tres partes: a). igualdad de los triángulos; b). teoría de los paralelos; c). equivalencia de las áreas. Termina con el teorema de Pitágoras.

El libro II se compone de 2 difiniciones, 12 teoremas, 2 problemas, i trata de los rectángulos i de la fórmula $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$.

El libro III estudia en 11 difiniciones, 31 teoremas i 6 problemas, las propiedades del círculo.

El libro IV, con 7 definiciones i 16 problemas; está destinado a las figuras inscritas en el círculo i las circunscritas.

El libro V da a conocer las razones i proporciones en 20 definiciones, 4 axiomas i 25 teoremas.

El libro VI contiene la teoría de la semejanza i de las líneas proporcionales, con 4 difiniciones i 33 proposiciones.

Los libros XI i XII pertenecen a la Jeometría del Espacio· el XI consta de 9 definiciones i 21 proposiciones; i el XII, de 1 lema i 2 teoremas.

Euclides procede en sus proposiciones siempre del mismo modo: enunciado, esposicion, construccion, prueba i conclusion; i a él se debe el carácter sintético de la obra, el raciocinio deductivo i la correcta lójica.

Mas, entre los defectos que ha señalado la crítica, mencionaremos los principales.

1.° Las definiciones i axiomas contienen muchas suposiciones que no son evidentes;

2.° Da una prueba sintética sin indicar el análisis que le permitió obtenerla;

3.° No jeneraliza ningun resultado obtenido;

4.° Emplea con poca frecuencia la superposicion de las figuras como método de demostracion;

5.° La clasificacion de las proposiciones deja que desear;

6.° La obra es innecesariamente larga i prolija.

No obstante estos defectos, las proposiciones están bien encadenadas, se fundan en conocimientos casi evidentes i se llega gradualmente a conclusiones mas o ménos complicadas; las demostraciones son rigurosas, a menudo hai elegancia en ellas, i no presentan dificultad a los estudiantes. En fin, casi todas las propiedades métricas de las figuras, en oposicion a las gráficas, han sido estudiadas. El hecho solo de que por espacio de dos mil años haya sido considerada esta obra como *libro clásico*, es la mejor prueba de su excelencia; i ahora mismo sirve de texto de enseñanza en Inglaterra. Debemos agregar que algunos de los mas grandes matemáticos, como Descartes, Pascal, Newton i Lagrange, han insistido en que sea mantenido como testo clásico; con lo cual se conseguiria darle a la enseñanza de la Jeometría mayor uniformidad; i de este modo se poseeria una obra de referencia.

Euclides publicó una coleccion de 95 ejemplares bajo el título de *Data*, destinada segun Pappo, a enseñar a resolver los problemas.

Otra obra de Euclides, *De divisionibus*, consta de 35 problemas sobre la division de las áreas que tienen entre sí una razon conocida.

El libro XIII, que ha sido agregado a algunas ediciones, se atribuye a Aristeo; i los libros XIV i XV, a Hipsiclés.

Los libros VII, IX VIII, i X dan a conocer la *Teoría de los Números*.

Para los griegos, la *Lojística* u operaciones elementales del cálculo numérico, no forma parte de las Ciencias Matemáticas. Este cálculo era enseñado a los niños, probablemente, por medio del abaco. La ciencia de los números o *Aritmética*, era la ciencia propiamente tal i trataba de las razones, proporciones i de las propiedades de los números. Segun esto, ántes de estudiar a Euclides, el estudiante ya conocia el arte de calcular i el uso de la regla i del compas.

La Lojística i el Dibujo Lineal eran, para los griegos, los conocimientos fundamentales de las dos grandes ramas de las Matemáticas: el Análisis i la Jeometría.

A causa de la dificultad que presentaba el sistema de numeracion usado entónces, Euclides creyó mas apropiado principiar el estudio de las ciencias exactas por la Jeometría; el representar los números racionales o inconmensurables por medio de líneas, como lo hace Euclides, tiene ventajas que hoi son reconocidas.

En su obra resuelve gráficamente ecuaciones de segundo grado de estas clases:

1.° $$a(a-x)=x^2$$

o bien $$x^2+ax-a^2=0 \qquad \text{(II, 2)}$$

a la que le da la forma

$$\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2}-\frac{1}{2}a;$$

2.° $$x^2-ab=0; \qquad \text{(II, 14)}$$

3.° $$ax^2-bx+c=0;$$

4.° $$ax^2+bx+c=0 \qquad \text{(VI, 28, 29)}$$

Los resultados del libro V se aplican tanto a los números como a las magnitudes jeométricas; i en opinion de muchos, esta manera de dar a conocer las proporciones es la mas satisfactoria.

La teoría de las proporciones es atribuida a Eudoxio; i la materia del libro VII, a los pitagóricos.

Este libro VII comienza por algunas definiciones basadas sobre la notacion pitagórica. Las proporciones 1 a 3 tratan del máximo comun divisor; las 4 a 22 de las fracciones; las 23 a 34 de los números primos; i las 35 a 41 del menor múltiplo comun i de algunos problemas.

El libro VIII estudia las proporciones continuas i las progresiones jeométricas, considerando especialmente los casos en que uno de los términos es de la forma ab, a^2 o a^3.

El libro IX tambien trata de las progresiones por cuociente, i demuestra el valor de S hasta $n = 4$ solamente.

Se da una grande estension al estudio de los números primos: demuestra que su número es ilimitado; examina las propiedades de los números pares e impares; i establece que todo número de la forma

$$2^{n-1}(2^n - 1) \text{ es } \textit{perfecto} \text{ si } 2^n - 1 \text{ es primo.}$$

El libro X está destinado a las magnitudes irracionales: Euclides adoptó la representacion jeométrica por carecer los griegos del signo matemático correspondiente. Las proposiciones 1 a 21 versan sobre los radicales; i las 22 a 117 sobre los radicales dobles de la forma

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}.$$

Descubrió que habia 25 especies de lineas representativas de esta espresion, trabajo que, a juicio de Nesselmann, revela, del modo mas brillante, el talento del jeómetra griego; pues, llegó a tal resultado sin conocer ei Aljebra ni sus poderosos recursos. Despues de este trabajo de Euclides, i durante un intervalo de mas de mil años, hasta Leonardo de Pisa i Cardan, no se introdujo ninguna idea nueva en la teoría de las magnitudes inconmensurables.

En la proposicion 117 del libro X, Euclides demuestra del modo siguiente que la diagonal b es inconmensurable con el lado a de un cuadrado:

Sea $a : b$ la razon irreductible de estas dos magnitudes. Segun I, 47 : $b^2 = 2a^2$, es decir, b^2 es par, lo mismo que b; i como a es primo con b, a tiene que ser impar.

Ahora bien, siendo b par o de la forma $2n$, reemplazando tendremos que

$$2\,a^2 = 4\,n^2 \text{ o } a^2 = 2\,n^2;$$

es decir, a^2 i a son pares, lo que es absurdo. Luego, a i b son inconmensurables.

Ademas de las tres obras citadas, Euclides escribió las siguientes:

Un tratado elemental de las *secciones cónicas;* una obra sobre las *superficies curvas* (cono i cilindro probablemente); una coleccion de *sofismas jeométricos,* destinada a descubrir los errores; i un tratado de los *Porismos.* Todas estas obras ya no existen; pero, Pappo, discute tan estensamente el último trabajo, que Chasles, en 1860, reconstituyó el texto, dando a conocer la division armónica i las propiedades proyectivas de las figuras, que son las bases de la jeometría moderna.

En su *Optica,* que contiene 61 proposiciones basadas en 12 hipótesis, comienza por establecer que la luz es emitida por los ojos, porque, de otro modo, «si fueran los objetos los que la emitieran, podríamos encontrar fácilmente una aguja en el suelo, lo que raras veces sucede».

Algunos autores creen que escribió una *Catóptrica* compuesta de 31 proposiciones relativas a la reflexion especular. La parte jeométrica de estas dos obras está tratada por el método euclidiano. El tratado de astronomía jeométrica titulado *Phaenomena,* da a conocer los trabajos de Autolico (—330?), que son los mas antiguos de las obras matemáticas existentes.

Escribió *Sectio canonis,* que versa sobre los intervalos musicales.

En la Antolojía Palatina se atribuye a Euclides este problema: «Una mula i un asno cargados de trigo se dirijen al mercado. La mula dice al asno:

—«Dáme una medida i cargaré el doble que tú; i si te ce-
« do una, nuestras cargas serán iguales». Segun esto, díme, sabio matemático, ¿cuáles eran sus cargas?»

(*Continuará*).