



Teoría de la Elasticidad

POR

ALBERTO OBRECHT

La teoría de la elasticidad trata de determinar las relaciones que existen entre las deformaciones de los cuerpos i las fuerzas que las enjendran.

Desde luego la deformacion de un cuerpo cualquiera no es arbitraria si se admite que los cambios de lugar de las moléculas son funciones continuas de sus coordenadas. Se demostrara en efecto, mas adelante, que la variacion de las distancias entre las moléculas depende, en cada punto del cuerpo, de seis cantidades determinadas llamadas *factores de deformación*.

Por otra parte, las fuerzas que producen la deformacion enjendran ciertas acciones entre las moléculas i se demostrará tambien que todas estas acciones dependen, en cada punto del cuerpo, de seis fuerzas determinadas, llamadas *presiones directrices*.

El problema consiste, por consiguiente, en establecer las relaciones que ligan los factores de deformación a las presiones directrices.

CAPITULO I

DEFORMACION INFINITAMENTE PEQUEÑA DE UN CUERPO

Una deformación cualquiera de un cuerpo es una sucesión de deformaciones infinitamente pequeñas; se trata de estudiar una de éstas.

Sean, en la primera posición del cuerpo, A i B dos moléculas, infinitamente próximas una de otra, r su distancia; x, y, z las coordenadas de A respecto de un sistema de tres ejes rectangulares i ξ, η, ζ las proyecciones de r sobre los tres ejes.

En la segunda posición del cuerpo, A i B se trasladan en A', B' . Sean u, v, w las proyecciones de AA' sobre los ejes; $u+du, v+du, w+du$ las de BB' ; r' la distancia $A'B'$ i ξ', η', ζ' las proyecciones de r' .

La abscisa de B' puede expresarse de dos maneras distintas i se deduce así la relación

$$x + u + \xi' = x + \xi + u + du$$

Luego

$$\xi' = \xi + du.$$

Ahora du es el incremento, o la diferencial, de la función u cuando x, y, z tienen los incrementos ξ, η, ζ . Se tiene, por consiguiente,

$$du = \frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\zeta$$

Luego tambien

$$\xi' = \xi + \xi \frac{du}{dx} + \eta \frac{du}{dy} + \zeta \frac{du}{dz}$$

En esta ecuacion, i las otras dos análogas, relativas a los otros dos ejes, ξ , η , ζ son las coordenadas de B respecto de un sistema de ejes, paralelos a los primeros, i de oríjen A ; ξ' , η' , ζ' los de B' respecto de otro sistema paralelo, de oríjen A' .

Las moléculas repartidas sobre una superficie infinitamente pequeña S , al rededor de A , se trasladan sobre otra superficie S' al rededor de A' , i la ecuacion de S' , respecto de A' , se deduce de la de S , respecto de A , si se sustituyen ξ , η , ζ por sus valores en funcion de ξ' , η' , ζ' .

Como las ecuaciones de sustitucion son lineales i homogéneas, las ecuaciones de S i S' son del mismo grado; ademas si la ecuacion de S es la suma de términos, de grados determinados, la ecuacion de S' es tambien la suma de términos de grados respectivamente iguales.

Se deduce que las moléculas repartidas sobre un elemento plano, al rededor de A , se trasladan, despues de la deformacion, sobre otro elemento plano al rededor de A' i que las moléculas repartidas sobre un elipsoide de centro A , se trasladan sobre otro elipsoide de centro A' .

FACTORES DE DEFORMACION

Sean α , β , γ los cosenos directores de AB , se puede escribir

$$\xi' = r \left(\alpha + \alpha \frac{du}{dx} + \beta \frac{du}{dy} + \gamma \frac{du}{dz} \right)$$

Las cantidades u , v , w , son, por hipótesis, infinitamente pequeñas, sus derivados parciales son, por lo tanto, infinitamente pequeños del mismo orden; luego, si se desprecian los infinitamente pequeños de orden superior al primero, se tiene

$$\xi'^2 = r^2 \left(2\alpha_2 + \alpha \frac{du}{dy} + 2\alpha_1 \frac{du}{dy} + 2\alpha_1 \frac{du}{dz} \right)$$

Las fórmulas son análogas respecto de los otros dos ejes i la suma de los primeros miembros es igual a r'^2 ; se pone para simplificar,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{du}{dx} = a & \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = b \\ \frac{dv}{dy} = a' & \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = b' \\ \frac{dw}{dz} = a'' & \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dz} = b'' \end{array} \right.$$

i se obtiene

$$r'^2 = r^2 \left\{ 1 + 2 (a \alpha^2 + a' \beta^2 + a'' \gamma^2 + b \beta \gamma + b' \gamma \alpha + b'' \alpha \beta) \right\}$$

Luego

$$r' = r (1 + a \alpha^2 + a' \beta^2 + a'' \gamma^2 + b \beta \gamma + b' \gamma \alpha + b'' \alpha \beta)$$

Se ve que la variación de las distancias, entre las moléculas próximas de A , depende de seis cantidades. Ellas se llaman *factores de deformación* i sus valores están definidos por las relaciones (1).

CASO PARTICULAR

Si los seis factores de deformacion son nulos, los cambios de lugar de los moléculas satisfacen a las seis ecuaciones diferenciales.

$$\begin{array}{ll} \frac{du}{dx} = 0 & \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0 \\ \frac{dv}{dy} = 0 & \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = 0 \\ \frac{dw}{dz} = 0 & \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0 \end{array}$$

Las tres primeras ecuaciones demuestran que u , v , w son respectivamente independiente de x , y , z . Ahora, en la suma

$$\frac{dv}{dz} + \frac{dv}{dy}$$

el primer término es función de x , z , i el otro de x , y ; como la suma debe ser idénticamente nula, los dos términos no pueden depender sino de la variable x i las dos funciones deben ser iguales i de signos contrarios, lo mismo sucede con las otras dos sumas i se tiene así

$$\begin{array}{lll} \frac{dv}{dz} = f(x) & \frac{dw}{dx} = \varphi(y) & \frac{du}{dy} = \psi(z) \\ \frac{dw}{dy} = -f(x) & \frac{du}{dz} = -\varphi(y) & \frac{dv}{dx} = -\psi(z) \end{array}$$

Por otra parte los funciones arbitrarios f , φ , ψ , deben averiguar las relaciones

$$\begin{array}{l} f' + \psi' = 0 \\ \varphi' + f' = 0 \\ \psi' + \varphi' = 0 \end{array}$$

Luego

$$f' = \varphi' = \psi' = 0$$

Segun esto los tres funciones f , φ , ψ , son constantes, sean N , M , L , sus valores i A , B , C , otras tres constantes arbitrarías. Se obtiene

$$u = A + Ly - Mz$$

$$v = B + Mz - Nx$$

$$w = C + Nx - Ly$$

Los primeros términos de los segundos miembros corresponden a una traslación de todas las moléculas i los dos últimos a una rotación de todas ellas al rededor de un mismo eje. En resumen, el conjunto de las moléculas se mueve entonces como un sólido invariable. Se averigua así que las distancias respectivas de los puntos permanecen constantes. No hai deformación:

VARIACIONES DE LOS FACTORES DE DEFORMACION CUANDO SE CAMBIA DE LA ORIENTACION DE LOS EJES DE COORDENADAS.

Si se cambia la orientación de los ejes de coordenadas, los cosenos directores α , β , γ , de A , B , toman otros valores α' , β' , γ' i las relaciones que expresan los primeros en función de los otros son lineales i homogéneas, por lo tanto la sustitución, en la expresión de r^2 , de α , β , γ , por sus valores en función de los nuevos cosenos da una expresión de la misma forma en α' , β' , γ' . Se deduce de esta última los nuevos valores de los factores de deformación.

Sea, por ejemplo, un cambio de orientación debido a una

rotacion infinitamente pequeña ϵ de los ejes alrededor de OX
Se tiene, en este caso,

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha' \\ \beta &= \beta' - \gamma' \epsilon \\ \gamma &= \gamma' + \beta' \epsilon \end{aligned}$$

Al sustituir estos valores en la expresión de r' se puede prescindir de los acentos i se obtiene así

$$r' = r \left\{ 1 + a \alpha^2 + a' (\beta^2 - 2 \beta \gamma \epsilon) + a'' (\gamma^2 + 2 \beta \gamma \epsilon) \right. \\ \left. + b (B \gamma + \epsilon B^2 - \epsilon \gamma^2) + b' (\alpha \gamma + \alpha' \beta \epsilon) + b'' (\alpha B - \epsilon \alpha \gamma) \right\}$$

Dé aquí se deduce, para la variación de los factores de deformacion,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \delta a = 0 & \delta b = 2\epsilon(a'' - a') \\ \delta a' = +\epsilon b & \delta b' = -\epsilon b'' \\ \delta a'' = -\epsilon b & \delta b'' = +\epsilon b' \end{array} \right.$$

DILATACION CÚBICA

Se observa que la suma $a + a' + a''$ no cambia por efecto de la rotacion ϵ . Ella no cambia tampoco cuando se consideran otras rotaciones alrededor de OY, OZ, luego su valor no cambia por efecto de una rotacion elemental, alrededor de un eje cualquiera. Se deduce que su valor es independiente de la orientacion de los ejes de coordenadas.

Si la superficie S es una esfera de centro A i de radio r , la superficie S' es un elipsoide i se puede elejir la orientacion de los ejes de coordenadas, de manera que ellos coincidan con las direcciones principales del elipsoide S' . En esta hipótesis, los semi-ejes tienen los valores

$$r(1+a), r(1+a'), r(1+a'')$$

Luego su volúmen es

$$\frac{4}{3} \pi r^3 (1+a+a'+a'')$$

Se deduce que $a+a'+a''$ representa la dilatacion del volúmen de la esfera S . Esta suma se llama *dilatacion cúbica* en el punto A .

CAPITULO II

DE LAS PRESIONES

Sea M la posicion de una molécula cualquiera, en un cuerpo deformado. Se considera un plano cualquiera que pasa por M i las acciones, sobre M , de todas las moléculas situadas a un mismo lado del plano. Sea f la resultante de estas acciones; se admite que la fuerza f varia de una manera continua cuando se consideran, en el mismo plano, otras moléculas infinitamente próximas de M .

Aceptada esta hipótesis, el sistema de las fuerzas f que corresponden a las moléculas, repartidas sobre un elemento plano $d\omega$, son equivalentes a un solo vector. Este se designa por $pd\omega$ i se dice que p es la presion, en M , sobre el elemento $d\omega$.

El sentido de f respecto del plano indica si las moléculas están sometidas a una presion o a una tension; sin embargo, los dos casos se estudian conjuntamente i se consideran simplemente las tensiones como presiones negativas.

Ahora la presion, en M , depende, en jeneral, de la orientacion del elemento $d\omega$. Sea Mn la normal a este elemento; se representa la presion por p_n .

Por otra parte la presion p_n puede tener una direccion

cualquiera respecto del plano de $d\omega$; para definir esta dirección se dan las tres proyecciones de p_n sobre los ejes de coordenadas; estas proyecciones se designan por

$$p_{nx} : p_{ny} : p_{nz}$$

Si se consideran, en particular, las presiones sobre tres elementos, respectivamente perpendiculares a los ejes de coordenadas, se obtienen las nueve proyecciones.

$$\begin{array}{ccc} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{array}$$

Estas nueve cantidades se reducen a seis distintas, porque *el orden de los índices es indiferente*.

Para demostrarlo se considera un volúmen elemental limitado por seis planos, respectivamente paralelos a los de coordenadas. Las fuerzas que obran sobre este elemento comprenden las presiones sobre las seis caras i las fuerzas, análogas a la pesantez, que obran sobre todas las moléculas. Como el elemento de volúmen está en reposo, la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto de un eje cualquiera, es igual a cero.

Se considera un eje de momentos, paralelo a OZ , i que pasa por el centro del volúmen. Las presiones sobre las caras dan los momentos

$$\begin{array}{cccc} p_{xy} & dy & dz & dx \\ -p_{yx} & dz & dx & dy \end{array}$$

Por otra parte el momento resultante de las fuerzas análogas a la pesantez es nulo; se obtiene, por consiguiente;

$$(p_{xy} - p_{yx}) dx dy dz = 0$$

O sea

$$p_{xy} = p_{yx}$$

Se demostraria de la misma manera que los otros índices pueden invertirse.

PRESIONES DIRECTRICES

Se considera, en el interior del cuerpo deformado, un elemento de volumen limitado por un tetraedro; tres de las caras son respectivamente paralelas a los planos de coordenadas i la cuarta es normal a una recta de cosenos directores α, B, γ .

Sea $d\omega$ el área de esta última cara; las áreas de las otras tres son $\alpha d\omega, B d\omega, \gamma d\omega$.

La suma de las proyecciones, sobre un eje cualquiera, de las fuerzas que obran sobre el tetraedro es igual a cero. Entre estas fuerzas, las presiones sobre las caras son infinitamente pequeñas de segundo orden i las fuerzas análogas a la pesantez son del orden del volumen del tetraedro, es decir, de tercer orden. En consecuencia la proyeccion de las fuerzas sobre OX da la ecuacion.

$$-p_{nx} d\omega + p_{xx} \alpha d\omega + p_{yx} \beta d\omega + p_{zx} \gamma d\omega = 0$$

Las ecuaciones relativas a las otras dos ejes son análogas i se deduce de ellos:

$$(3) \quad \begin{cases} p_{nx} = \alpha p_{xx} + \beta p_{yx} + \gamma p_{zx} \\ p_{ny} = \alpha p_{xy} + \beta p_{yy} + \gamma p_{zy} \\ p_{nz} = \alpha p_{xz} + \beta p_{yz} + \gamma p_{zz} \end{cases}$$

Estas ecuaciones demuestran que la presión, sobre un elemento plano, de dirección cualquiera, depende, en cada punto del cuerpo, de seis presiones determinadas; estas se llaman *presiones directrices*.

Las mismas ecuaciones permiten demostrar que la presión, al rededor de un punto, es constante, cuando ella es siempre normal al elemento. En efecto se tiene entonces

$$\begin{aligned} \alpha p_n &= \alpha p_{xx} \\ \beta p_n &= \beta p_{yy} \\ \gamma p_n &= \gamma p_{zz} \end{aligned}$$

Estos deben tener lugar para todos los valores de α, β, γ ; luego es necesario que se tenga

$$p_n = p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}$$

Se deduce que p_n es constante.

Sea $p_{nn'}$ la proyección de p_n sobre una dirección n' definida por los cosenos directores α', β', γ' ; se deduce de (3).

$$(4) \quad p_{nn'} = \alpha\alpha' p_{xx} + \beta\beta' p_{yy} + \gamma\gamma' p_{zz} + (\beta\gamma + \beta'\gamma') p_{yz} \\ + (\gamma\alpha' + \alpha\gamma') p_{zx} + (\beta\alpha' + \beta\alpha') p_{xy}$$

Como el segundo miembro es simétrico respecto de α, β, γ i α', β', γ' , se tiene la relación general.

$$p_{nn'} = p_{n'n}$$

Cuando las direcciones n, n' coinciden, se obtiene la proyección p_{nn} de la presión sobre la normal al elemento; su valor es, según (4),

$$(5) \quad p_{nn} = \alpha^2 p_{xx} + \beta^2 p_{yy} + \gamma^2 p_{zz} + 2\beta\gamma p_{yz} + 2\gamma\alpha p_{zx} + 2\alpha\beta p_{xy}$$

VARIACION DE LAS PRESIONES DIRECTRICES CUANDO SE CAMBIA
LA DIRECCION DE LOS EJES DE COORDENADAS

Las fórmulas (4) i (5) permiten resolver el problema.

Se supondrá, como mas arriba, que los nuevos ejes de coordenadas resultan de una rotacion infinitamente pequeña ε de los primeros al rededor de OX. En esta hipotesis, los cosenos directores de los nuevos ejes, respecto de los primeros, son

	α	β	γ
OX'	1	0	0
OY'	0	1	ε
OZ'	0	$-\varepsilon$	1

Se deduce entonces de (4) i (5)

$$\begin{array}{ll}
 p_{x'x'} = p_{xx} & p_{y'z'} = p_{yz} + \varepsilon(p_{zz} - p_{yy}) \\
 p_{y'y'} = p_{yy} + 2\varepsilon p_{yz} & p_{zx'} = p_{zx} - \varepsilon p_{xy} \\
 p_{z'z'} = p_{zz} - 2\varepsilon p_{yz} & p_{x'y'} = p_{xy} + \varepsilon p_{xz}
 \end{array}$$

En consecuencia, las variaciones de las presiones directrices son

$$(6) \quad \begin{cases} \delta p_{xx} = 0 & \delta p_{yz} = \varepsilon(p_{zz} - p_{yy}) \\ \delta p_{yy} = 2\varepsilon p_{yz} & \delta p_{zx} = -\varepsilon p_{xy} \\ \delta p_{zz} = -2\varepsilon p_{yz} & \delta p_{xy} = +\varepsilon p_{xz} \end{cases}$$

CAPITULO III

RELACIONES ENTRE LOS FACTORES DE DEFORMACION
I LAS PRESIONES DIRECTRICES

Las presiones directrices, en cada punto de un cuerpo de formado, deben ser funciones de los coeficientes de deformacion, en este punto, i ellas deben anularse cuando la deformacion es nula, es decir cuando los seis factores de deformacion son nulos.

Ahora, la ecuacion que espresa una presion directriz cualquiera puede desarrollarse en serie; en esta serie el termino independiente de los factores de deformacion es nulo i los términos de grado mayor que el primero deben despreciarse. Se obtiene así, para la presion p_{xx} , por ejemplo, una espresion de la forma

$$(7) \quad P_{xx} = Aa + A'a' + A''a'' + Bb + B'b' + B''b''$$

Las cantidades A, A', A'', B, B', B'' dependen, en jeneral, de las coordenadas del punto considerado. Se deduce que las seis presiones directrices son funciones lineales de los factores de deformacion i que estas funciones contienen 36 coeficientes incógnitas, cuyos valores pueden variar de un punto a otro del cuerpo deformado.

El problema se simplifica cuando se consideran los cuerpos llamados *isótropos*. Por definicion, las moléculas de un cuerpo isótropo, en el estado natural, están distribuidas simétricamente al rededor de cada punto i la simetría se refiere a un eje de direccion cualquiera.

Se deduce lógicamente que las 36 cantidades incógnitas que figuran en las espresiones de las seis presiones directrices conservan los mismos valores en todos los puntos del cuerpo i no varian tampoco cuando se cambia de una manera cualquiera la orientación de los ejes de coordenadas.

Estas propiedades permiten reducir a dos los 36 coeficientes de las relaciones análogas a (7).

Para demostrarlo se supone que los ejes de coordenadas jiran de un ángulo infinitamente pequeño ε , al rededor de OX; se ha demostrado—fórmulas (6)—que la presión p_{xx} queda la misma; luego el segundo miembro de (7) debe también quedar lo mismo, cualquiera que sea el valor de ε i cualesquiera que sean los valores de los factores de deformación.

Ahora las fórmulas (2) dan los cambios de los factores de deformación debidos a la rotación ε ; si se toman en cuenta esas fórmulas se deduce

$$0 = \varepsilon b (A' - A'') + 2 \varepsilon (a' - a'') B - \varepsilon b'' B' + \varepsilon b' B''$$

Como esta relación debe quedar satisfecha, cualesquiera que sean los valores de ε , a , a' , a'' , b , b' , b'' se debe tener

$$A' - A'' = B = B' = B'' = 0$$

La ecuación (7) se reduce entonces a la siguiente

$$p_{xx} = Aa + A' (a' + a'')$$

O bien

$$p_{xx} = A' (a + a' + a'') + (A - A') a$$

El primer paréntesis representa la dilatación cúbica; sea Q su valor. Sea también

$$A' = -\lambda$$

$$A - A' = -2\mu.$$

Se han adoptado los signos menos para que, siendo λ i μ dos cantidades positivas, una dilatación del cuerpo corresponda a tensiones, o sea a presiones negativas, se tiene por consiguiente

$$p_{xx} = -\lambda Q - 2\mu a$$

Si se permutan los ejes de coordenadas, las presiones i los factores de deformación se permutan, pero la dilatación cúbica Q i los coeficientes λ , μ quedan invariables; en consecuencia se tiene también

$$p_{yy} = -\lambda Q - 2\mu a'$$

$$p_{zz} = -\lambda Q - 2\mu a''$$

Se considera ahora la segunda ecuación (6)

$$\delta p_{yy} = + 2\varepsilon p_{yz}$$

se deduce, del valor de p_{yy} , i de la segunda ecuación (2).

$$\delta p_{yy} = -2\mu \delta a' = -2\mu \varepsilon b$$

Luego, al igualar los dos valores de δp_{yy} ,

$$2\varepsilon p_{yz} = -2\mu \varepsilon b$$

O sea

$$p_{yz} = -\mu b$$

Se deduce, por permutación,

$$p_{zx} = -\mu b'$$

$$p_{xy} = -\mu b''$$

Finalmente, si se reemplazan los seis factores de deformación por sus valores (1) se obtiene

$$(8) \left\{ \begin{array}{ll} p_{xx} = -\lambda Q - 2\mu \frac{du}{dx} & p_{yz} = -\mu \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \\ p_{yy} = -\lambda Q - 2\mu \frac{dv}{dy} & p_{zx} = -\mu \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \\ p_{zz} = -\lambda Q - 2\mu \frac{dw}{dz} & p_{xy} = -\mu \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \end{array} \right.$$

$$Q = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

Estas son las relaciones generales entre las presiones directrices i las deformaciones de los cuerpos isótropos.

Es oportuno observar que los coeficientes λ , μ tienen las dimensiones de una presión.

(Continuará)