HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

POR

CÁRLOS WARGNY

ADVERTENCIA

La obra que con este título ha publicado el señor W. W. Rouse Ball, de la Universidad de Cambridge, está dividida en tres grandes períodos, correspondientes a los tiempos antiguos, de la edad media i modernos. Sirve de introduccion a su notable trabajo, la prehistoria, que comprende los hechos anteriores a Tales (640 A. J. C.).

El presente estudio, que es un compendio de dicha obra, da a conocer los nombres de los matemáticos mas célebres i sus principales descubrimientos; analiza i critica sus doctrinas, i espone el desarrollo lento i progresivo de las ciencias exactas, desde los tiempos mas antiguos hasta nuestros dias.

CÁRLOS WARGNY

Valparaiso, Abril 8 de 1907.

CAPÍTULO PRIMERO. PREHISTORIA: FENICIOS, EJIPCIOS I CHINOS

La historia matemática comienza con la civilizacion de los griegos jonios, quienes debieron sus primeros conocimientos a los fenicios i ejipcios. Comerciantes i atrevidos navegantes los primeros, diéronles especial importancia a la aritmética, navegacion i astronomía; i reunieron los principales hechos suministrados por la observacion i la esperiencia, sin llegar a formar con ellos un cuerpo de doctrina científica. Sin embargo, Pitágoras era fenicio i, segun Heródoto, Tales era de la misma raza. Los fenicios instruyeron a los griegos en las primeras nociones de la aritmética práctica i los ejipcios en los rudimentos de la jeometría aplicada. Los caldeos eran hábiles astrónomos i hacian parte comun de sus progresos con los fenicios: estos usaban el sistema de pesos i medidas que aquellos habian formado. Se ha encontrado en Babilonia una tabla de los cuadrados de los números; i valiéndose del abaco o *suan-pan* (Cap. VII), aquellos pueblos sumaban i restaban mecánicamente, sin poseer ninguna teoría científica sobre los números i sus propiedades.

El primer documento que nos da a conocer el grado de conocimientos matemáticos que tenian los ejipcios, es el *papiro Rhind*, del Museo Británico, documento que remonta a mas de mil años A. J. C., i que parece ser una copia correjida de una obra escrita mas de diez siglos ántes. Titúlase *Instrucciones para conocer todas las cosas secretas*, i su autor es el sacerdote ejipcio *Ahmes*.

Principia este manual, compuesto de problemas de aritmética i jeometría, con la descomposicion de las fracciones, de la forma $2:(2n+1)$, en otras cuyo denominador es la unidad: por ejemplo, encuentra que

$$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{74}+\frac{1}{232},$$

indicando los resultados solos, sin mencionar los procedimientos empleados. Hai que advertir que para calcular las fracciones, cálculo lleno de dificultades para los primeros pueblos, los griegos procedian como los ejipcios; los romanos las reducian a doce avos ($n : 12$) i los caldeos a sesenta avos ($n : 60$); a estos últimos se debe la division sexajesimal del círculo.

Ahmes trata en seguida de la multiplicacion, i opera así: $13\,n = n + 4\,n + 8\,n$, doblando sucesivamente el número n i sumando en seguida los términos necesarios. Luego resuelve ecuaciones de la forma

$$x + \frac{1}{7} = 19$$

i llega al resultado

$$x = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$$

Es curioso saber que en aquellos remotísimos tiempos, ya se tenia una idea de la notacion aljebraica: Ahmes representa la incógnita (Kucha) por un monton o pila, la adicion por una especie de A, la sustraccion por dos flechas, i la igualdad por nuestro signo *menor que* ($<$). Termina la parte aritmética con las progresiones por diferencia, i parece que sabia sumar sus términos.

Antes de analizar las nociones jeométricas que trata Ahmes en su manual, conviene saber que los conocimientos de jeometría de aquella época, eran solo empíricos, inductivos i a veces mui poco exactos. Así encontramos en los libros sagrados de los judios (I Los Reyes VII, 23; Crónicas, IV, 2), la siguiente medida: «Hizo tambien un mar, perfectamente « redondo, de *diez codos* de diámetro, de un borde al otro, « en tanto que un cordon de *treinta codos*, media su circun- « ferencia.» Segun esto, seria $\pi = 3$. Los caldeos daban a π igual valor.

Sin embargo, a los ejipcios se deben las primeras ideas de jeometría, que, bien entendido, no son las de la ciencia pura i abstracta que crearon mas tarde los griegos, sino las requeridas en el ejercicio de la jeometría práctica o agrimensura, como claramente lo indica la palabra misma *ge*, tierra; *metreo*, mido. Heródoto refiere que, a consecuencia de las inundaciones periódicas del Nilo, organizóse, entre la casta sacerdotal, un cuerpo de agrimensores, encargados de resta blecer los deslindes de las propiedades destruidas por las aguas del rio. Con este motivo, a ellos atribuye la creacion de la ciencia jeométrica.

Los ejipcios orientaban exactamente sus templos de Norte a Sur, mediante algunas observaciones de la salida i puesta de los astros; i para trazar la línea de Este a Oeste, valíanse de una cuerda dividida en tres partes, cada una con las lonjitudes 3, 4 i 5; formaban con ella un triángulo rectángulo, aplicando de este modo el famoso teorema de Pitágoras $(5_2 = 3 + 4^2)$. verdad que no conocian en toda su jeneralidad.

En su manual, Ahmes trata los siguientes puntos de jeometría: determina la medida de capacidad de los cereales por medio de una fórmula parecida a

$$V = a\,b\left(c + \frac{1}{2}c\right);$$

calcula el área de algunas figuras, no siempre con mucha exactitud; i estima que la del círculo es

$$\left(d - \frac{1}{9}d\right)^2$$

siendo d el diámetro; segun esto, para $d = 1$, el círculo tendria una área igual a 64 : 81, i seria

$$\pi = \left(\frac{4}{3}\right) = 3,\ 16049,$$

cuando en realidad es aproximadamente $\pi=3{,}14159$. Mas adelante veremos que Arquímedes encontró el valor

$$\pi=22:7=3{,}14286$$

i que los hindúes empleaban el valor

$$\pi=\sqrt{10}=3{,}16957$$

Concluye el sacerdote ejipcio con el cálculo de las pirámides, i al hacerlo, establece las relaciones trigonométricas de algunos ángulos.

En resúmen, los conocimientos matemáticos que habian adquirido los fenicios i ejipcios, eran empíricos, sus teoremas referíanse a casos especiales i no tenian el carácter jeneral que despues les dieron los griegos. Estos últimos crearon una ciencia deductiva desde sus comienzos.

A pesar de todo, el orijen de la aritmética, la jeometría i la astronomía, se encuentra en las operaciones prácticas i observaciones de los fenicios, ejipcios i caldeos.

En cuanto a los chinos, hace tres mil años conocian ya el uso manual de la regla, la escuadra, el compás, la palanca, el torno i la brújula; poseian el teorema de Pitágoras aplicado a casos particulares (3, 4, 5; 1, 1, $\sqrt{2}$), i algunos teoremas sencillos; empleaban el sistema decimal de numeracion; hacian sus cálculos aritméticos con el suan-pan; i su astronomía era un simple acopio de observaciones, aunque no ignoraban que los fenómenos astronómicos son periódicos. Es de advertir que los chinos de aquella época eran mas instruidos que los de nuestros dias.

Primer período: tiempos antiguos

Las Matemáticas bajo la influencia de la civilizacion griega

(600 A. J.C. a 641 D. J.C.)

El carácter distintivo de este período es el desarrollo de la jeometría.

CAPITULO II.—ESCUELAS JÓNICA I PITAGORICA

(—600 a —400)

De esta época no poseemos mas que las obras históricas de Proclo i de Gémino, las biografías de algunos matemáticos i fragmentos de sus obras.

ESCUELA JÓNICA

Tales (640-550 A. J. C), comerciante, estadista, injeniero, astrónomo i jeómetra, nació en Mileto, i fué uno de los siete sabios de la Grecia. Despues de un viaje que hizo a Ejipto, donde estudió la astronomía i la jeometría, retiróse de la vida pública i dedicóse a la filosofía i a la ciencia.

Su enseñanza de la jeometría, consistia en proposiciones aisladas i sin encadenamiento lójico, siendo, sin embargo, sus demostraciones deductivas, i es lo que constituye su principal mérito.

Se le puede atribuir los siguientes teoremas, que referimos a *Los Elementos* de Euclides por medio del número del libro, seguido del de la proposicion, conforme con la edicion de Roberto Simson.

I. En un triángulo isósceles, los ángulos de la base son iguales (I, 3); lo demostraba sobreponiendo dos triángulos isósceles iguales i dando vuelta en seguida el de encima hasta hacerlos coincidir de nuevo.

II. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales (I, 15); lo admitia como evidente; Euclides lo demostró mas tarde por primera vez.

III. Un lado i dos ángulos adyacentes determinan un triángulo (I, 26); así podia medir una distancia desde la altura de una torre.

IV. Dos triángulos equiángulos tienen sus lados proporcionales (VI, 2,4); fundóse en este teorema para medir la altura de una pirámide, midiendo su sombra i la de un estilo vertical: las lonjitudes de estas sombras son proporcionales a las alturas de la pirámide y del estilo. Es probable que los ejipcios no poseyeran este teorema.

V. El diámetro dimidia al círculo; propiedad conocida desde mui antiguo.

VI. El ángulo inscrito en un semi-círculo es recto (III, 31). Este teorema era mirado como la obra maestra de Tales, i por su descubrimiento sacrificó a los Dioses un buei. Demostraba esta proposicion uniendo el vértice del ángulo recto con el centro del círculo, i aplicaba en seguida el teorema I; lo que hace suponer que conocia tambien el valor de la suma de los tres ángulos de un triángulo.

El valor de dos ángulos rectos que tienen esta suma, debióse haber presentado naturalmente a los que observaban los ladrillos triangulares de los embaldosados de los edificios o de los templos; porque el exágono regular, descompuesto en seis triángulos equiláteros, muestra claramente que cada ángulo en el centro vale $\frac{1}{6}$ de cuatro ángulos rectos; luego cada ángulo del triángulo regular es de 60°. Un rectángulo descompuesto en dos triángulos rectángulos iguales, por medio de la diagonal, indica igualmente que los ángulos agudos sumados valen un recto, lo cual es mas evidente en un cuadrado.

Por último, la altura descompone en dos triángulos rectángulos a un triángulo oblicuángulo.

Tales era mas célebre como astrónomo; creía que el año se componia de unos 365 dias, i que la tierra es esférica; esplicó la causa de los eclipses de sol i de luna; i valiéndose de las observaciones hechas por los caldeos i los ejipcios, predijo el eclipse de 28 de Mayo de 585 A. J. C., lo que le valió una gran nombradía.

Anaximandro, *Mamerco* i *Mandriato* fueron sus principales discípulos.

Anaximandro (—611a—545) sucedió a Tales en la escuela de Mileto. Escribió un tratado sobre la esfera, i consideró el infinito en el espacio i en el tiempo. A estos hechos, que son solo probables, agrégase la creencia de que introdujo el uso del *gnomon* o estilo de los cuadrantes solares; con cuya ayuda determinó la meridiana del lugar, los solsticios, la latitud de Esparta i la oblicuidad de la eclíptica.

La escuela de Tales, despues de 400 A. J. C., descuidó las Matemáticas i dedicóse a la filosofía i a la astronomía. Felizmente Pitágoras habia ya fundado una escuela que dió a las ciencias exactas un brillo estraordinario i a sus discípulos un renombre que se conserva hasta hoi dia.

ESCUELA PITAGÓRICA

Pitágoras (—569 á—500), matemático, filósofo i eminente profesor, nació en Samos; fué discípulo de Ferecidas i de Anaximandro; viajó por Ejipto, Asia Menor, Sicilia, i por último se estableció en Crotona, donde abrió una escuela, que en poco tiempo adquirió gran celebridad. Acudia a ella la nobleza i aun las mujeres.

Teano, una de sus discípulas mas atentas, fué mas tarde su esposa, i escribió una biografía del ilustre maestro.

En su enseñanza filosófica i moral, las matemáticas servian de introduccion i de base.

Los novicios llamábanse *auditores*; i, despues de tres años de estudios, adquirian el título de *matemáticos*: entónces se les confiaban los descubrimientos de la Escuela. Estos últimos, que designamos con el nombre de *pitagóricos*, componian una asociacion comunista i prestaban juramento de no revelar al público su ciencia. Llevaban una vida sencilla, severa i ordenada: al rayar el alba, traian a la memoria los hechos del dia anterior, formábanse un programa de deberes i trabajos para el dia, i en la noche hacian la comparacion de sus actos con el plan impuesto. Reconocíanse entre sí por medio del pentagrama o triple triángulo, que, segun Jámblico, era una estrella regular de cinco vértices, con las letras y, g, i, th, a.

A causa del poder político que adquirió la Escuela, contraria a las ideas democráticas del tiempo, en 501 prodújose una revuelta popular; incendiaron la casa que ocupaba, i Pitágoras hubo de refujiarse en Tarento i despues en Metaponto, donde, un año despues, fué asesinado en otra conmocion popular.

Sus discípulos formaron en Tarento una escuela de filosofía i matemáticas que subsistió durante siglo i medio, guardando siempre la mas estricta reserva sobre sus ideas científicas. En 470, Hipaso fué ahogado por haber hecho públicos los conocimientos de sus compañeros. Mas tarde, sin embargo, se divulgaron sus doctrinas, i en 370 Filolao escribió el primer tratado de la ciencia pitagórica, obra que llegó a manos de Platon. Los pitagóricos, durante todo el siglo V, fueron los únicos poseedores de las ciencias exactas, en el mundo intelectual.

Segun Proclo, a Pitágoras se debe el carácter riguroso de deduccion de la Jeometría i el órden lójico de sus proposiciones, que hasta hoi conserva.

En opinion de Aristoxeno, la Escuela se envanecia de haber elevado a la aritmética por encima de las necesidades del comercio; i, como buenos teóricos, establecieron la máxima de que «una figura i un paso hácia adelante i no un número para ganar un óbolo».

Pitágoras fué un reformador moralista i un filósofo; i, mirando la ciencia de los números como base de su filosofía, llegó hasta atribuirles propiedades físicas a las cantidades i magnitudes: el número 5 era el símbolo del color; la pirámide, del fuego; un sólido representaba la *tetrada* ó los cuatro elementos de la materia: el fuego, el aire, el agua i la tierra.

Los pitagóricos clasificaron las cuestiones matemáticas en cuatro secciones: la aritmética i la música correspondian a los números; la jeometría i la astronomía, a las magnitudes. Durante largo tiempo fué mirado este *quadrivium* (quatuor, via), como un curso necesario i suficiente para una instruccion liberal. Empero, su enseñanza mezclábase con consideraciones filosóficas i aun metafísicas, que entorpecian la marcha esperimental de las ciencias exactas.

En lo que concierne a la jeometría, poseian los siguientes conocimientos:

I. Definiciones, mas filosóficas que matemáticas; para Pitágoras, el punto era una unidad *(mónada)* con posicion; para Euclides, lo que no tiene partes.

II. a). En todo triángulo, $A+B+C=180°$. (Eucl. I, 32).

La demostracion, atribuida a Pitágoras, dióla Euclides en sus Elementos, i es la que todos conocemos.

b). Una recta al caer sobre otra forma dos ángulos suplementarios (I, 13); c). Dos paralelas cortadas por una trasversal forman ángulos alternos iguales (I, 29).

Es mui verosímil que tanto estos teoromas como sus demostraciones son obra de Pitágoras.

III. Cuadrado de la hipotenusa: $a^2=b^2+c$. (I, 47,48). Este es elteorema mas célebre de Pitágoras, i en nuestros colegios es designado con el nombre de «El Pitágoras».

Se crée que la demostracion de Pitágoras es una de las dos siguientes:

a) Descompongamos un cuadrado (II, 4), de lado $a+b$, por medio de dos perpendiculares a sus lados, en dos cuadrados i dos rectángulos: $(a+b) = a + 2ab + b$; sobre d, una de las diagonales del rectángulo ab, construyamos un cuadrado inscrito en el primero; encontraremos que $(a+b)^2 = d^2 + 4\ (\tfrac{1}{2}ab) \therefore d^2 = a^2 + b^2$.

Para abreviar la demostracion, hemos empleado la notacion aljebraica moderna; las letras representan rectas, i el signo $\therefore$ *de aquí.*

b) Bajando la altura de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa a, se obtienen, con los catetos b, c i los segmentos $m, n, (m+n=a)$, las relaciones conocidas:

$$b^2 = am,\ c = an \therefore b^2 + c^2 = a^2$$

Esta segunda demostracion presume el conocimiento de los siguientes teoremas.—*a*). $am + an = a^2$. siendo $m+n=a$ (II, 2);—*b*). dos triángulos equiángulos tiene sus lados proporcionales (VI, 4);—c). de $a:b=b:c$ se deduce $ac=b^2$ (VI, 17).

IV. Es probable que Pitágoras resolviera los problemas de construir un paralelógramo equivalente a un triángulo o a otra figura (I, 44, 45); i un cuadrado equivalente a otra figura (II, 14), de lo cual se deduce la construccion de $x\ =ab$.

Se cuenta que despues de haber resuelto esta última cuestion, ofreció a los Dioses un buei, como lo hiciera Tales un siglo ántes. Allman cree que sabia ademas construir una figura semejante a otra i equivalente a una tercera (VI, 25).

V. Pitágoras no ignoraba que era posible cubrir una superficie plana, alrededor de un punto, con triángulos equiláteros, cuadrados o exágonos.

VI. Los pitagóricos pretendian haber encontrado la cuadratura del círculo, la mas perfecta de las figuras, segun ellos.

VII. Conocian los cinco poliedros regulares, el tetraedro, el exaedro, el octaedro, el dodecaedro i el icosaedro, que se pueden inscribir en la esfera, considerada por ellos como el mas hermoso de los sólidos.

VIII. Conocian los métodos i cálculos empleados por Euclides en los libros II i V de sus *Elementos;* i parece que Pitágoras demostró la inconmensurabilidad del lado de un cuadrado con su diagonal, verdad que encontramos en la *Jeometría* de Legendre (Lib. I, 8, corol. 2). como consecuencia del «Pitágoras».

Por lo que hace a sus conocimientos sobre la teoría de los números, los pitagóricos estudiaron los números poligonales, los factores de los números, los números proporcionales i las séries numéricas.

Pitágoras divide los números en pares $(2n)$ e impares $(2n+1)$ o *gnomones*; considera a $2n+1=(n+1)\ -n$; i la suma S de los impares, desde 1 hasta $2n+1$, $S=(n+1\ )$. A la raiz cuadrada llama *lado*; *plano*, al producto de dos números; *oblongo*, si el producto no tiene raiz cuadrada exacta.

sólido, al producto de tres números; i *cubo*, cuando los tres números son iguales.

Todas sus demostraciones están fundadas en consideraciones jeométricas: por ejemplo, segun lo hace notar Aristóteles, sobreponiendo un cuadrado de 25 casillas iguales a otro de 36, se encuentra que el gnómon 11 (casillas) colocado alrededor del cuadrado, 5^2, da un nuevo cuadrado, 6^2.

Como se dijo, Pitágoras demostró en toda su jeneralidad que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, relacion que se verifica con los números.

$$2\,n^2+2\,n^2+1,\ 2\,n+2\,n \text{ i } 2\,n+1;$$

o los mas jenerales, haciendo $m=n+1$,

$$m^2+n^2,\ 2\,n.\,n \text{ i } m^2—n^2$$

Arquitás i Platon establecieron reglas para $n=1$; Diofantes no ignoraba las relaciones jenerales.

Estudió los números *triangulares*, que tienen la forma

$$\frac{1}{2}n\,(n+1)$$

i que corresponden a la progresion aritmética

$$n,\ n—1,\ n\text{-}2\ldots.2,\ 1.$$

Así el número triangular de 4 es 10; i $10=4+3+2+1$.

Clasificó los factores de los números en *abundantes, perfectos* i *deficientes*, segun fueran mayores, iguales o menores que su suma. Los números proporcionales los estudiaron sus discípulos, tal como lo hizo Euclides en el libro V de sus *Elementos*.

Por último, ocupáronse en el estudio de las progresiones aritmética, jeométrica, armónica i musical; las tres primeras tienen las formas conocidas:

$$a,\quad a+\delta,\quad a+2\delta,\quad a+3\delta,\ldots.$$

$$a,\quad ar,\quad ar^2,\quad ar^2,\ldots..$$

$$\frac{1}{a},\quad \frac{1}{a+\delta},\quad \frac{1}{a+2\delta},\quad \frac{1}{a+3\delta},\ldots.$$

Los cuatro números 6, 8, 9 i 12 están en proyeccion musical, i su forma jeneral es,

$$a,\quad \frac{2ab}{a+b},\quad \frac{a+b}{2},\quad b.$$

Pitágoras habia descubierto que tres cuerdas sonoras dan una nota, su quinta i su octava, cuando sus lonjitudes son entre sí como los números 6, 4, 3, los que forman una progresion musical. Se dice que esta fué la causa de que se incluyera el estudio de la música en el *quadrivium*.

Los principales sucesores de Pitágoras fueron *Epicarmo*, *Hipaso*, *Filolao*, *Lisis* i *Arquitás*.

Arquitás (hácia—400), fué en siete ocasiones diferentes, gobernador de Tarento; salvó la vida de Platon amenazada por Dionisio; protejió la instruccion pública i aun la de sus esclavos. Pereció en un naufrajio, muerte que los pitagóricos miraron como un castigo por haberse desviado de la senda que señalara el maestro. Fué el primero de los pitagóricos que aplicara la ciencia jeométrica a la mecánica: inventó la polea cuya teoría espuso; fabricó un pájaro volador, varios juguetes mecánicos, i diversos aparatos destinados a construir las curvas i a resolver los problemas de su tiempo. Fué uno de los primeros que resolvió la duplicacion del cubo, famoso problema de la antigüedad conocido con el nombre de *Delíaco*, i que consiste en encontrar el lado de un cubo cuyo volúmen sea doble de otro cubo dado. El procedimiento de Arquitás es el siguiente: Sobre el diámetro

OA de la base de un cilindro recto, se levanta un semi-círculo perpendicular, que se hace jirar alrededor de la jeneratriz OB: la superficie enjendrada por la semi-circunferencia cortará a la cilíndrica segun una curva, la que, a su vez, es cortada en un punto P por un cono de eje OA i de ángulo en el vértice conocido: tendremos así que la proyeccion de OP sobre la base del cilindro es a su radio $\frac{1}{2}\,OA$ como el lado del cubo desconocido es al lado del que se da. Para idear esta solucion, Arquitás conocia los siguientes teoremas: *a)* la tanjente es perpendicular en la estremidad del radio (III, 18); *b)* dos cuerdas se cortan en segmentos proporcionales (III, 35); *c)* la arista de un diedro es perpendicular al plano perpendicular a sus caras (XI, 19).

La demostracion analítica de esta construccion es sencilla: sea OA el eje de las x, la jeneratriz OB el de las z i $a = \frac{1}{2}\,OA$; en coordenadas polares, tendremos para las superficies cilíndrica, cónica i la del semicírculo:

$$r \operatorname{sen} \theta = 2a \cos \phi, \quad \operatorname{sen} \theta \cos \phi = \tfrac{1}{2}, \quad r = 2a \operatorname{sen} \theta.$$

Como estas tres superficies se cortan en P, será,

$$\operatorname{sen} \theta = \tfrac{1}{2} \;\therefore\; \rho^3 = r\,(\operatorname{sen} \theta_3) = 2\,a_3,$$

siendo ρ la proyeccion de OP i el lado del cubo que se busca.

Otros de los pitagóricos conocidos fueron *Teodoro* de Cirene, *Teetetes* su alumno, *Timeo* de Locres, i *Brison* de Heraclea. *Teodoro* probó jeométricamente que las raices cuadradas de 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 i 17 son inconmensurables con la unidad; *Brison* trató de calcular el área del círculo, inscribiendo i circunscribiendo cuadrados que transformaba en cierto número de polígonos; i por último tomaba para el área del círculo, el medio aritmético de las áreas poligonales.

OTRAS ESCUELAS GRIEGAS

Ademas de las escuelas de Mileto i de Tarento, florecieron en aquella época las de Quios, de Elea i de Tracia,

Enópidas de Quios (—500 a—440), astronómo, resolvió los dos problemas que siguen: Bajar una perpendicular de un punto a una recta (I, 12); construir sobre una recta un ángulo igual a otro (I, 23).

En Elea, distinguiéronse *Jenófanes*, *Parménides*, *Zenon* i *Meliso*.

Zenon (- 495 a- 435), emitió la célebre paradoja de Aquiles i la tortuga: Pretendia que Aquiles, con un andar diez veces mas rápido que el de una tortuga, no la alcanzaria jamas, si ésta se encontraba a 1,000 estadíos de aquél; porque, decia Zenon, una vez que Aquiles haya recorrido los 1,000 estadíos, la tortuga habrá adelantado cien mas; i cuando Aquiles haya recorrido estos 100, la tortuga habrá andado 10 mas, i así sucesivamente; de modo que Aquiles se irá acercando indefinidamente a la tortuga sin poder alcanzarla jamas. La causa del error de Zenon proviene de que no admitia que el espacio pudiera dividirse indefinidamente. Este problema aparece en todos nuestros textos de áljebra con el nombre de «problema de los correos», i es debido a Clairaut. Si representamos por x la distancia que ha de recorrer la tortuga ántes de ser alcanzada, $1,000+x$ será la recorrida por Aquiles; i de la ecuacion $1,000+x=10x$ sale $x=1,000:9=111,11\ldots$

Por otra parte, los espacios sucesivos recorridos por la tortuga, forman una série cuya suma es

$$S=100+10+1+0,1+0,01+\ldots$$

o bien

$$\text{lím } S=\frac{a}{1-r}=\frac{100}{1-0,1}=1,000:9.$$

Estas i otras paradojas de la Escuela de Elea, indujeron a los griegos a rechazar las cantidades infinitamente pequeñas, i en su lugar emplearon el método de exhaucion.

La escuela *atomística* de Tracia fué fundada por *Leucipo* discípulo de Zenon; *Demócrito* i *Epicuro* fueron sus sucesores.

Demócrito (—460 a—370) de Abdera, escribió sobre filosofía, jeometría i aritmética, obras todas que han desaparecido.

Desde fines del siglo II, la intelectualidad griega se manifiesta con todo su esplendor en Atenas i Cnido.